

**MODEL MATEMATIKA SACR PENYEBARAN VIRUS HEPATITIS C  
PADA PENGGUNA NARKOBA SUNTIK**

**SKRIPSI**

Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Negeri Yogyakarta

untuk memenuhi sebagian persyaratan guna

memperoleh gelar Sarjana Sains



**Disusun oleh :**

**Lidyana Candrawati**

**NIM. 10305141022**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA**

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA**

**2014**

## **PERSETUJUAN**

Skripsi dengan judul **“MODEL MATEMATIKA SACR PENYEBARAN VIRUS HEPATITIS C PADA PENGGUNA NARKOBA SUNTIK”** yang disusun oleh

Lidyana Candrawati

NIM : 10305141022

telah disetujui oleh dosen pembimbing untuk diujikan dihadapan dewan penguji Skripsi.

Yogyakarta, 28 April 2014

Pembimbing



Dwi Lestari, M.Sc  
NIP. 198505132010122006

## PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Lidyana Candrawati

NIM : 10305141022

Prodi/Jurusan : Matematika/Pendidikan Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Judul TAS : MODEL MATEMATIKA SACR PENYEBARAN

VIRUS HEPATITIS C PADA PENGGUNA NARKOBA  
SUNTIK

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya saya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang telah lazim. Apabila ternyata terbukti pernyataan ini tidak benar, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya dan saya siap menerima sanksi sesuai aturan yang berlaku.

Yogyakarta, 28 April 2014

Yang menyatakan,



Lidyana Candrawati  
NIM 10305141022

## PENGESAHAN

Skripsi dengan judul :

**“MODEL MATEMATIKA SACR PENYEBARAN VIRUS HEPATITIS C  
PADA PENGGUNA NARKOBA SUNTIK”**

Yang Disusun Oleh :

Nama : Lidyana Candrawati

NIM : 10305141022

Prodi : Matematika

Skripsi ini telah diuji di depan Dewan Penguji Skripsi pada tanggal 9 Mei 2014 dan dinyatakan LULUS.

**Dewan Penguji**

Nama	Jabatan	Tanda Tangan	Tanggal
<u>Dwi Lestari, M.Sc</u> NIP. 198505132010122006	Ketua Penguji		26/5 14
<u>Eminugroho R. S., M.Sc</u> NIP. 198504142009122003	Sekretaris Penguji		26/5 14
<u>Tuharto, M.Si</u> NIP. 196411091990011001	Penguji Utama		22/5 14
<u>Bambang S. H. M., M.Kom</u> NIP. 196802101988121001	Penguji Pendamping		26/5 14

Yogyakarta, 28 Mei 2014

Fakultas Matematika dan Ilmu  
Pengetahuan Alam,  
Dekan



Dr. Hartono

NIP. 196203291987021002

## **MOTTO**

Dan Tuhanmu berfirman, “Berdo’alah kepada-Ku, niscaya akan Kuperkenankan bagimu”.

(Qs.Al-Mu’min:60)

Sesungguhnya sesudah kesulitan itu pasti ada kemudahan, maka apabila telah selesai (urusan dunia), bersungguh-sungguhlah (dalam ibadah).

(Qs. Al Insyiroh : 6-7)

Pelajarilah ilmu ! Karena mempelajarinya karena Allah itu adalah taqwa (khasyatun). Menuntutnya itu adalah pengabdian (ibadah). Mengkajinya itu adalah tasbih. Membahaskannya itu adalah jihad. Mengajarkan kepada orang yang belum mengetahuinya itu adalah sedekah. Memberikannya kepada ahlinya itu mendekatkan diri kepada Rabb. Karena ilmu merupakan tanda-tanda akan halal dan haram, sinar jalan para penghuni surga.

Ilmu merupakan pendamping saat takut, teman saat terasing, teman bicara dikala sendirian, dalil atas kesenangan dan kesusahan, senjata dalam menghadapi musuh, hiasan di hadapan teman.

(Mu’adz bin Jabal ra)

## **PERSEMBAHAN**

*Karya sederhana ini saya persembahkan untuk:*

*Kedua orang tua saya, Bapak Walsudiyono dan Ibu Sri Suwarti,  
yang telah memberikan segala bentuk kasih sayang dan dukungan, serta doa 'nya yang  
selalu mengalir tulus tiada henti-hentinya.*

*Adik- adikku yang terbaik dan 'nyebeli' Dynmas Pahendra, Dyan Ajeng Chandrawati,  
Pahendra Dhewa Pratama, terimakasih untuk setiap keramaian yang kalian ciptakan.*

*Sahabat hatiku, terimakasih untuk setiap kebersamaan dan waktu-waktu berharganya.  
Serta untuk sahabat-sahabat terbaikku, terimakasih untuk indahnya persahabatan yang  
kita jalin.*

# MODEL MATEMATIKA SACR PENYEBARAN VIRUS HEPATITIS C PADA PENGGUNA NARKOBA SUNTIK

Oleh:

Lidyana Candrawati

NIM. 10305141022

## ABSTRAK

Penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik perlu mendapat perhatian lebih, karena persentase penyebarannya yang cukup tinggi. Penelitian ini bertujuan untuk memecahkan permasalahan yang muncul dalam penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik yaitu mengetahui model penyebaran hepatitis C dan kapan penyakit menghilang dan kapan penyakit akan tetap ada pada suatu populasi.

Adapun tahapan yang dilakukan dalam menganalisa model penyebaran hepatitis C pada pengguna narkoba suntik yaitu membentuk model yang berupa model SACR (*susceptible-acute infection-chronic carrier-recovered*), selanjutnya menentukan titik ekuilibrium, menentukan nilai *basic reproduction number*, menganalisa kestabilan disekitar titik ekuilibrium dan melakukan simulasi dengan menggunakan software maple 15.

Model SACR pada penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik merupakan model yang berbentuk persamaan diferensial nonlinear. Hasil analisa model SACR tersebut diperoleh 2 titik ekuilibrium yaitu bebas penyakit dan endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal jika *basic reproduction number* yang kurang dari satu, dan stabil asimtotik global jika *basic reproduction number* kurang dari atau sama dengan satu. Hal ini berarti bahwa untuk jangka waktu yang lama, populasi terinfeksi virus hepatitis C akan semakin berkurang atau bahkan menghilang sehingga virus tidak ada lagi dalam populasi. Sementara itu, untuk *basic reproduction number* lebih dari satu, titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa untuk jangka waktu tertentu, virus Hepatitis C akan tetap ada. Selanjutnya, berdasarkan simulasi yang dibentuk dari model SACR, diperoleh bahwa semakin tinggi frekuensi rata-rata penggunaan jarum secara bersama-sama pada pengguna narkoba suntik, maka semakin meningkat pula proporsi individu *acute infection*, *chronic carrier*, dan *recovered*, sementara proporsi individu *susceptible* akan semakin menurun.

**Kata kunci :** *Hepatitis C, pengguna narkoba suntik, model SACR, titik ekuilibrium, kestabilan*

## **KATA PENGANTAR**

Assalamu'alaikum wr wb,

Alhamdulillah, puji syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan nikmat karunia dan ridha-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi dengan judul

### **“MODEL MATEMATIKA SACR PENYEBARAN VIRUS HEPATITIS C PADA PENGGUNA NARKOBA SUNTIK”**

Tugas akhir ini dibuat sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains (S.Si). Sejak awal kuliah hingga terselesainya tugas akhir ini, penulis mendapat dukungan dan bantuan dari banyak pihak. Pada kesempatan ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dan memberikan dukungan kepada penulis, yaitu:

1. Bapak Dr. Hartono selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Yogyakarta.
2. Bapak Dr. Sugiman selaku Ketua Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta yang telah memberikan kelancaran dalam urusan akademik.
3. Bapak Dr. Agus Maman Abadi selaku Ketua Program studi Matematika FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta dan selaku Pembimbing Akademik.



4. Ibu Dwi Lestari, M.Sc selaku Dosen Pembimbing skripsi yang telah memberikan pengarahan, saran, bimbingan dan masukan sehingga penulis dapat menyelesaikan penulisan tugas akhir ini.
5. Bapak dan ibu dosen Jurusan Pendidikan Matematika yang telah memberikan ilmu kepada penulis secara langsung maupun tidak langsung.
6. Bapak, ibu dan keluarga yang tidak pernah lelah dalam memberikan nasehat, bimbingan dan doa untuk penulis.
7. Teman-teman, sahabat-sahabat dan semua pihak yang telah memberikan dukungan dan membantu secara langsung maupun tidak langsung sehingga dapat memperlancar proses penyusunan tugas akhir ini.

Penulis menyadari bahwa dengan keterbatasan kemampuan sehingga penulisan tugas akhir ini jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis sangat menghargai segala kritik dan saran yang dapat membangun tugas akhir ini agar menjadi lebih baik.

Akhir kata, semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat tidak hanya bagi penulis tetapi juga bagi pembaca.

Wassalamu'alaikum wr wb.

Yogyakarta, April 2014

Penulis

Lidyana Candrawati

NIM. 10305141022

## DAFTAR ISI

PERSETUJUAN .....	ii
PERNYATAAN.....	iii
PENGESAHAN .....	iv
MOTTO .....	v
PERSEMBAHAN .....	vi
ABSTRAK .....	vii
KATA PENGANTAR .....	viii
DAFTAR TABEL.....	xii
DAFTAR GAMBAR .....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiv
DAFTAR SIMBOL.....	xv
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1. 1    Latar Belakang Masalah .....	1
1. 2    Pembatasan Masalah .....	5
1. 3    Rumusan Masalah .....	5
1. 4    Tujuan.....	6
1. 5    Manfaat Penulisan .....	6
BAB II LANDASAN TEORI .....	7
2.1.    Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	7
2.2.    Persamaan Diferensial .....	10
2.3.    Persamaan Diferensial Linear Orde Satu .....	11
2.4.    Sistem Persamaan Diferensial .....	15
2.4.1.    Sistem Persamaan Diferensial Linear .....	16
2.4.2.    Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear .....	17
2.5.    Titik Ekuilibrium .....	18
2.6.    Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear .....	19
2.7.    Kestabilan Titik ekuilibrium .....	23
2.8.    Radius Spektral.....	31
2.9.    Bilangan Reproduksi Dasar .....	32

2.10. Kriteria Routh-Hurwitz .....	34
2.11. Limit superior dan limit inferior.....	39
2.12. Model Matematika .....	40
BAB III PEMBAHASAN .....	43
3.1. Formulasi Model Matematika .....	43
3.2. Titik Ekuilibrium.....	51
3.3. Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ ) .....	55
3.4. Kestabilan Titik Ekuilibrium.....	57
3.5. Simulasi Model.....	78
BAB IV PENUTUP .....	87
4.1 Kesimpulan.....	87
4.2 Saran .....	89
DAFTAR PUSTAKA .....	90
LAMPIRAN.....	92

## **DAFTAR TABEL**

Tabel 1. Variabel dan parameter yang digunakan.....	46
---	----

## DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Simulasi kestabilan titik ekuilibrium.....	24
Gambar 2. Proses memodelkan.....	40
Gambar 3. Diagram alir penyebaran hepatitis C pada pengguna narkoba suntik .	47
Gambar 4. Simulasi sistem (3.7) untuk $R_0 < 1$ .....	80
Gambar 5. Potret fase pada bidang $s, a, c$ untuk $R_0 < 1$ .....	81
Gambar 6. Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 = 1,699456652$ dengan $\kappa = 6$ .....	83
Gambar 7. Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 = 2,265942202$ dengan $\kappa = 8$ .....	83
Gambar 8. Simulasi Sistem (3.7) untuk $R_0 = 2,832427753$ dengan $\kappa = 10$ .....	84
Gambar 9. Potret fase pada bidang $s, a$ , dan $c$ untuk $R_0 > 1$ .....	85

## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi $s, a, c, r$ terhadap $t$ dengan $R_0 < 1$ .....	92
Lampiran 2. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase bidang $s, a, c$ dengan $R_0 < 1$ .....	93
Lampiran 3. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi $s, a, c, r$ terhadap $t$ dengan $\kappa = 6$ ( $R_0 = 1,699456652$ ) .....	94
Lampiran 4. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi $s, a, c, r$ terhadap $t$ dengan $\kappa = 8$ ( $R_0 = 2,265942202$ ) .....	95
Lampiran 5. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi $s, a, c, r$ terhadap $t$ dengan $\kappa = 10$ ( $R_0 = 2,832427753$ ) .....	96
Lampiran 6. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase bidang $s, a, c$ dengan $R_0 > 1$ .....	97

## DAFTAR SIMBOL

$S(t)$	Populasi pengguna narkoba suntik yang rentan terinfeksi hepatitis C
$A(t)$	Populasi pengguna narkoba suntik yang terinfeksi hepatitis C
$C(t)$	Populasi pengguna narkoba suntik yang terinfeksi dan mengalami hepatitis C kronis
$R(t)$	Populasi pengguna narkoba suntik yang sembuh/tidak terdapat virus hepatitis C di dalam tubuh
$\gamma$	Nilai eigen
$I$	Matriks identitas
$\dot{\mathbf{x}}$	Turunan $\mathbf{x}$ terhadap $t$
$L$	Himpunan terbuka
$\mathbb{R}^n$	Himpunan bilangan real dimensi $n$
$C^1$	Himpunan fungsi-fungsi yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu
$\bar{\mathbf{x}}$	Titik ekuilibrium
$\mathbf{x}_0$	Kondisi awal
$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$	Turunan $\mathbf{f}$ di $\mathbf{x}_0$
$J\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$	Matriks jacobian di $\mathbf{x}_0$
$\subseteq$	Himpunan bagian atau sama dengan
$\in$	Elemen/anggota
$C^1(L)$	Himpunan fungsi-fungsi yang mempunyai turunan parsial sampai turunan pertama yang kontinu di $L$
$\Re \gamma_i$	Bagian real nilai eigen ke $i$
$R_0$	Bilangan reproduksi dasar
$H$	Matriks Hurwitz berukuran $n \times n$
$\Delta_k$	Determinan matriks Hurwitz tingkat $k$
$\rho(A)$	Spektral radius/nilai eigen dominan dari matriks $A$

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sup f(x)$	Limit superior fungsi $f(x)$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \inf f(x)$	Limit inferior fungsi $f(x)$
$\sup f(x)$	Supremum fungsi $f(x)$
$\inf f(x)$	Infimum fungsi $f(x)$
$S$	Proporsi populasi pengguna narkoba suntik yang rentan terinfeksi hepatitis C
$A$	Proporsi populasi pengguna narkoba suntik yang terinfeksi hepatitis C
$C$	Proporsi populasi pengguna narkoba suntik yang terinfeksi dan mengalami hepatitis C kronis
$R$	Proporsi populasi pengguna narkoba suntik yang sembuh/tidak terdapat virus hepatitis C di dalam tubuh
$N(t)$	Populasi total
$B$	laju rekrutmen individu yang selanjutnya masuk menjadi individu <i>susceptible</i>
$\lambda$	Laju infeksi
$\kappa$	rata-rata laju peminjaman/penggunaan jarum suntik yang tidak steril
$b_a$	Peluang transmisi akibat adanya kontak antara individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>acute infection</i>
$b_c$	Peluang transmisi akibat adanya kontak antara individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>chronic carrier</i>
$\mu$	laju kematian alami
$\sigma_1$	tingkat perpindahan individu <i>acute infection</i> menjadi individu <i>chronic carrier</i>
$\sigma_2$	tingkat perpindahan individu <i>chronic carrier</i> menjadi individu <i>recovered</i>
$\rho$	proporsi populasi <i>acute infection</i> yang menjadi <i>chronic carrier</i>



$(1-\rho)$	Proporsi populasi <i>acute infection</i> yang sembuh total (masuk kompartemen <i>recovered</i> )
$E_0$	Titik ekuilibrium bebas penyakit
$E_1$	Titik ekuilibrium endemik

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang Masalah**

Perkembangan ilmu pengetahuan khususnya di bidang matematika turut memberikan peranan penting dalam menggambarkan fenomena penyebaran suatu penyakit. Fenomena penyebaran penyakit disajikan dalam bentuk model matematika. Model matematika adalah model yang merepresentasikan suatu permasalahan di dunia nyata ke dalam persamaan matematika. Model matematika yang digunakan untuk mengetahui penyebaran suatu penyakit di suatu daerah tertentu dikenal sebagai model epidemi.

Model matematika mengenai epidemiologi memungkinkan untuk memprediksi dinamika epidemi pada suatu populasi berdasarkan faktor epidemiologi, perilaku jangka panjang dari dinamika awal invasi, atau dampak dari vaksinasi pada penyebaran infeksi (Kelling-Pejman, 2008). Salah satu fenomena penyebaran penyakit yang dapat dimodelkan dalam bentuk matematika yaitu tentang penyebaran penyakit Hepatitis C.

Hepatitis C adalah salah satu jenis penyakit hepatitis yang menginfeksi organ hati. Hepatitis C disebabkan oleh virus hepatitis C (HCV). HCV pertama kali ditemukan pada tahun 1989, dan menjadi penyebab kasus hepatitis NANB (non-A non-B) pasca transfusi. Namun pada tahun 1975, penyakit ini dikenal sebagai kasus-kasus pasca transfusi. HCV merupakan jenis virus RNA dari

keluarga *Flaviviridae* genus *Hepacivirus* (DirJen PP &PL Kementrian Kesehatan, 2012).

Virus Hepatitis C merupakan virus paling berbahaya bila dibandingkan dengan virus hepatitis yang lainnya, karena 70%-80% penderita terinfeksi dapat berkembang menjadi infeksi menahun dan berkelanjutan menjadi hepatitis kronik. Hepatitis C merupakan penyebab utama pada 27% kasus sirosis dan 25% kasus kanker hati. Dalam beberapa kasus, orang yang mengalami sirosis juga mengalami gagal hati, kanker hati, atau pembuluh yang sangat membengkak di esofagus dan lambung, yang dapat mengakibatkan perdarahan hingga kematian.

Berdasarkan data Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) tahun 1999 diperkirakan 3% dari populasi dunia atau sekitar 170 juta penduduk terinfeksi hepatitis C. Berdasarkan data Organisasi Kesehatan Dunia (WHO) 2009, diperkirakan bahwa tujuh juta penduduk Indonesia mengidap virus Hepatitis C dan ribuan infeksi baru muncul setiap tahun, namun 90% penderita tidak menyadari kondisi tersebut.

Hepatitis C dapat menular melalui beberapa media, antara lain melalui transfusi darah, pencangkokan organ dari donor yang terinfeksi, kelahiran dari ibu yang terinfeksi, melalui benda-benda pribadi seperti gunting kuku, pisau cukur, dan peralatan sejenis lainnya. Adapun sumber penularan yang terbesar dalam kasus penularan hepatitis C adalah penggunaan jarum suntik yang tidak steril secara bersamaan, terutama oleh pengguna narkoba melalui jarum suntik dan pembuatan tato. Di Indonesia, prevalensi HCV diantara pengguna narkoba suntik

mencapai 77,3% (PKNI, tanpa tahun). Berdasarkan hasil Evaluasi Pengumpulan Data Hepatitis C Tahap I yang dilakukan oleh Depkes pada Oktober 2007 sampai dengan 9 September 2008, terungkap bahwa hampir 40% pasien hepatitis C yang terdata mengaku menggunakan jarum suntik narkoba dan penyebab-penyebab yang lain relatif kecil, seperti melalui transfusi darah, hubungan seks dan lain sebagainya. Prosentase penularan penyakit Hepatitis C melalui penggunaan narkoba suntik tergolong cukup besar. Oleh sebab itu, pembahasan mengenai penyebaran virus hepatitis C sangat penting untuk diperhatikan.

Penelitian mengenai model penyebaran dengan kelas *carrier* sebelumnya telah dilakukan oleh Maia Martcheva dan Carlos Castillo-Chavez (2003) dalam *Diseases with chronic stage in a population with varying size*, dalam penelitian tersebut membahas mengenai penyebaran hepatitis C dengan model *susceptible-acute infection-chronic infection*. Penelitian yang lain dilakukan oleh M. Kretzschmar and L. Wiessing (2004) dalam *Modelling the transmission of hepatitis C in injecting drug users*, dan Dontwi dkk (2010) dalam *Mathematical modeling of Hepatitis C Virus transmission among injecting drug users and the impact of vaccination*, dalam penelitian tersebut dibahas mengenai penyebaran hepatitis C dengan model *susceptible-acute infection-chronic carrier-recovered*.

Model epidemik yang umum digunakan dalam menganalisa penyebaran penyakit yaitu model SIR. Model ini awalnya dipelajari oleh Kermack dan McKendrick. Berdasarkan karakteristiknya, model ini mengelompokkan populasi ke dalam tiga subpopulasi yaitu *susceptible* (kelompok individu yang rentan terinfeksi penyakit), *infected* (kelompok individu yang terinfeksi penyakit),

*recovered* (kelompok individu yang telah bersih dari penyakit). Meskipun model SIR merupakan model dengan pendekatan yang baik untuk karakteristik epidemiologi dari banyak penyakit, namun untuk beberapa jenis penyakit yang memiliki karakteristik penyebaran yang lebih kompleks, model ini kurang sesuai. Untuk beberapa penyakit tertentu, sebagian individu yang terinfeksi dapat berkembang menjadi kronis, sehingga perlu adanya pengembangan model yang mampu mengakomodasi karakteristik penyakit tersebut, yaitu ditambahkan suatu kelompok/subpopulasi *carrier*. Pada penyebaran penyakit dengan populasi *carrier*, individu *Susceptible* dapat terinfeksi karena adanya kontak dengan individu *Acute infection* maupun individu *carrier* (Keeling dan Pejman, 2008). Individu yang terinfeksi akut (*acute infection*) dalam suatu periode tertentu akan sembuh (*recovered*) total dengan sendirinya, atau dapat pula berkembang menjadi pembawa virus/penyakit (*carrier*) (Keeling dan Pejman, 2008). Pada umumnya, model ini dapat diterapkan pada penyebaran virus Hepatitis C, karena seorang yang terinfeksi (*acute infection*) virus Hepatitis C bisa berkembang menjadi Hepatitis kronik maupun akan sembuh dengan sendirinya (meskipun dengan persentase yang kecil).

Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dibahas mengenai pembentukan dan analisa model matematika terhadap penyebaran virus Hepatitis C. Model yang dibentuk ini difokuskan pada penyebaran virus melalui jarum suntik yang tidak steril pada pengguna narkoba suntik, karena mengingat besarnya prosentase penularan melalui cara ini. Selanjutnya dari model yang terbentuk, akan dilihat perilaku solusi disekitar titik ekuilibrium agar dapat dianalisa kestabilan titik

ekuilibrium, sehingga dapat diketahui kapan penyakit ini menghilang dan kapan mulai menyebar. Kemudian diberikan pula simulasi numerik untuk model yang terbentuk.

## **1.2 Pembatasan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, pembatasan masalah pada skripsi ini yaitu :

1. pembahasan penyebaran virus hepatitis C hanya terbatas pada sumber penyebaran melalui jarum suntik pada pengguna narkoba suntik,
2. pemberian terapi atau pengobatan Hepatitis C tidak dibahas
3. model yang dibentuk hanya terdapat 4 subpopulasi, yaitu *Susceptible (S)*, *Acute Infection (A)*, *Chronic carrier (C)* dan *Recovery (R)*,
4. populasi manusia dalam model ini diasumsikan homogen, artinya setiap anggota populasi relatif memiliki karakteristik yang sama, yaitu pada rata-rata penggunaan jarum yang dipakai secara bersamaan.

## **1.3 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah, maka dapat dirumuskan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model matematika untuk masalah penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik ?
2. Bagaimana analisis kestabilan model penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik pada populasi bebas penyakit dan endemik ?

#### **1.4 Tujuan**

Berdasarkan permasalahan di atas, tujuan dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Mengetahui bentuk model penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik.
2. Mengetahui kestabilan model penyebaran virus hepatitis C oleh pengguna narkoba suntik pada populasi bebas penyakit dan endemik.

#### **1.5 Manfaat Penulisan**

Penulisan skripsi ini diharapkan dapat memperkenalkan suatu model matematika khususnya model matematika penyebaran virus hepatitis C, bahkan dapat menjadi inspirasi untuk penulisan karya ilmiah maupun tugas akhir selanjutnya.

Penulisan skripsi ini juga diharapkan dapat digunakan untuk melakukan pendugaan mengenai endemik penyakit Hepatitis C khususnya pada pengguna narkoba suntik, sehingga dapat diprediksi berapa banyak individu yang akan terjangkit setelah penyakit Hepatitis C muncul dalam beberapa waktu. Prediksi tersebut kedepannya dapat digunakan untuk upaya pencegahan guna meminimalkan banyak individu yang terjangkit. Selain itu, model matematika ini memberikan informasi bahwa penggunaan jarum suntik secara bersama-sama meningkatkan resiko terinfeksi hepatitis C.

## BAB II

### LANDASAN TEORI

Pada bab ini, akan diuraikan landasan teori yang akan digunakan dalam bab selanjutnya sebagai bahan acuan yang mendukung tujuan penulisan. Materi yang akan diuraikan berisi definisi-definisi dan teori kajian matematika, antara lain nilai eigen dan vektor eigen, persamaan diferensial, sistem persamaan diferensial linear, sistem persamaan diferensial nonlinear, titik ekuilibrium, linearisasi, kestabilan titik ekuilibrium, bilangan reproduksi dasar, kriteria *Routh-Hurwitz*, limit superior dan inferior barisan fungsi, dan pemodelan matematika.

#### 2.1. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 2.1** (Anton, 1987)

*Jika  $A$  adalah matriks  $n \times n$ , maka vektor tak nol  $\mathbf{x}$  dalam  $\mathbb{R}^n$  dinamakan vektor eigen (eigenvector) dari  $A$  jika  $A\mathbf{x}$  adalah kelipatan skalar dari  $x$  yaitu*

$$A\mathbf{x} = \gamma\mathbf{x} \tag{2.1}$$

*untuk suatu skalar  $\gamma$ . Skalar  $\gamma$  dinamakan nilai eigen dari  $A$  dan  $\mathbf{x}$  dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\gamma$ .*

Persamaan (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \gamma\mathbf{x} \\ A\mathbf{x} &= \gamma I\mathbf{x} \\ (\gamma I - A)\mathbf{x} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$



dengan  $I$  adalah matriks identitas. Persamaan (2.2) akan memiliki pemecahan tak nol jika dan hanya jika

$$\det(\gamma I - A) = 0 \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) dinamakan persamaan karakteristik dari  $A$  dan skalar yang memenuhi persamaan (2.3) adalah nilai eigen dari  $A$ .

Pada matriks  $A$  dengan ukuran  $n \times n$ , maka polinomial karakteristik  $A$  mempunyai bentuk

$$\det(\gamma I - A) = \gamma^n + c_1\gamma^{n-1} + c_2\gamma^{n-2} + \dots + c_n$$

Sehingga persamaan karakteristik  $A$  menjadi

$$\gamma^n + c_1\gamma^{n-1} + c_2\gamma^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

dengan  $c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ .

### Contoh 2.1

Diberikan matriks  $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks  $A$ .

Penyelesaian:

a. Akan ditentukan nilai eigen dari matriks  $A$

$$\begin{aligned} \det(\gamma I - A) &= 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\det \begin{bmatrix} \gamma - 3 & 2 \\ -1 & \gamma \end{bmatrix} = 0$$

$$\gamma^2 - 3\gamma + 2 = 0$$

$$(\gamma - 1)(\gamma - 2) = 0$$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks  $A$  adalah  $\gamma_1 = 1$  dan  $\gamma_2 = 2$ .

- b. Akan ditentukan vektor-vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen dari matriks  $A$

Untuk  $\gamma_1 = 1$

$$(\gamma I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Persamaan  $-2x_1 + 2x_2 = 0$ , ekuivalen dengan  $x_1 = x_2$ .

Misalkan  $x_2 = t$ , maka  $x_1 = t$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Diambil  $t = 1$ , maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\gamma_1 = 1$

adalah  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Untuk  $\gamma_2 = 2$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Persamaan  $-x_1 + 2x_2 = 0$  ekuivalen dengan  $x_1 = 2x_2$ .

Misalkan  $x_2 = t$ , maka  $x_1 = 2t$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

Diambil  $t = 1$ , maka diperoleh vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\gamma_2 = 2$

adalah  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

## 2.2. Persamaan Diferensial

**Definisi 2.2** (Ross, 1984)

*Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan/menyertakan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.*

Berdasarkan banyaknya variabel bebas yang dilibatkan, persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

**Definisi 2.3** (Ross, 1984)

*Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.*

**Definisi 2.4** (Ross, 1984)

*Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.*

**Contoh 2.2:**

Contoh persamaan diferensial biasa

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t$$

Contoh persamaan diferensial parsial

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Persamaan diferensial biasa diklasifikasikan berdasarkan orde derivatif tertinggi yang muncul pada persamaan.

**Contoh 2.3:**

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (\text{persamaan diferensial biasa orde 2})$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5 \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \quad (\text{persamaan diferensial biasa orde 4})$$

**2.3. Persamaan Diferensial Linear Orde Satu**

**Definisi 2.5** (Ross, 1984)

*Persamaan diferensial linear orde  $n$  dengan variabel tak bebas  $y$  dan variabel bebas  $x$ , dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:*

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x),$$

dengan  $a_0 \neq 0$ .

**Definisi 2.6** (Ross, 1984)

*Persamaan diferensial biasa orde satu dikatakan linear jika dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (2.4)$$

Persamaan (2.4) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0$$

atau

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.5)$$

dengan  $M(x, y) = P(x)y - Q(x)$  dan  $N(x, y) = 1$ .

Persamaan (2.5) bukan merupakan persamaan eksak karena  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = P(x) \neq$

$\frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0$  kecuali jika  $P(x) = 0$ . Persamaan diferensial (2.5) dapat dikatakan

eksak jika memenuhi  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$ .

Selanjutnya, persamaan (2.5) dibentuk ke dalam persamaan separabel sederhana, yaitu berbentuk  $\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}$  dengan mengalikan persamaan

(2.5) dengan faktor integrasi yang tergantung pada  $x$  yaitu  $\mu(x)$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned} \mu(x)M(x, y)dx + \mu(x)N(x, y)dy &= 0 \\ \Leftrightarrow \mu(x)[P(x)y - Q(x)]dx + \mu(x)dy &= 0 \\ \Leftrightarrow [\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]dx + \mu(x)dy &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$\mu(x)$  merupakan faktor integrasi dari persamaan (2.6) jika dan hanya jika persamaan (2.6) adalah eksak, yaitu jika dan hanya jika

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)] = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x)]$$

Kondisi ini dapat direduksi menjadi

$$\mu(x)P(x) = \frac{d}{dx} [\mu(x)] \quad (2.7)$$

Pada persamaan (2.7) fungsi  $P$  merupakan fungsi atas variabel bebas  $x$ , sementara  $\mu$  adalah fungsi atas  $x$  yang tidak diketahui, sehingga persamaan (2.7) dapat ditulis sebagai persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned} \mu P(x) &= \frac{d\mu}{dx} \\ \Leftrightarrow \frac{d\mu}{\mu} &= P(x)dx \end{aligned} \quad (2.8)$$

Untuk memperoleh solusi khusus dari persamaan (2.8), dilakukan pengintegralan pada kedua ruas persamaan (2.8) sehingga

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ln|\mu| &= \int P(x)dx \\ \Leftrightarrow \mu &= e^{\int P(x)dx}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Selanjutnya mengalikan persamaan (2.4) dengan faktor integrasi (2.9), didapat

$$\begin{aligned} e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} P(x)y &= e^{\int P(x)dx} Q(x), \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} [e^{\int P(x)dx} y] &= e^{\int P(x)dx} Q(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Kemudian dengan mengintegalkan kedua ruas pada persamaan (2.10), diperoleh solusi dari persamaan (2.4) yang berbentuk

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + c$$

sehingga

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left[ \int e^{\int P(x)dx} Q(x) dx + c \right]$$

dengan  $c$  adalah suatu bilangan konstan.

#### Contoh 2.4

Diberikan persamaan diferensial linear orde satu berikut

$$\frac{dy}{dx} + \left( \frac{2x+1}{x} \right) y = e^{-2x} \quad (2.11)$$

Berdasarkan persamaan (2.8) dapat dimisalkan  $P(x) = \left( \frac{2x+1}{x} \right)$ . Maka diperoleh faktor integrasi

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \left( \frac{2x+1}{x} \right) dx} = e^{2x + \ln|x|} = e^{2x} e^{\ln|x|} = |x| e^{2x} \quad (2.12)$$

Kemudian mengalikan persamaan (2.11) dengan persamaan (2.12), diperoleh

$$\begin{aligned} x e^{2x} \frac{dy}{dx} + x e^{2x} \left( \frac{2x+1}{x} \right) y &= x e^{2x} e^{-2x} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} [x e^{2x} y] &= x e^{2x} e^{-2x} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} [x e^{2x} y] &= x \end{aligned} \quad (2.13)$$

Untuk memperoleh solusi dari persamaan (2.11), dapat diperoleh dengan mengintegalkan kedua ruas pada persamaan (2.13) diperoleh

$$xe^{2x}y = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2x}e^{-2x} + c \frac{e^{-2x}}{x}$$

atau

$$y = \frac{x}{2}e^{-2x} + \frac{c}{x}e^{-2x}$$

dengan  $c$  suatu bilangan konstan.

## 2.4. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dengan  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  dan  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .

Jika notasi  $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$  untuk menyatakan turunan  $\mathbf{x}$  terhadap  $t$ , maka

$$\dot{\mathbf{x}} = \left( \frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right)^T.$$

Diberikan sistem autonomous

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.14}$$

yaitu suatu sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang implisit dengan  $\mathbf{x} \in L \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $L$  himpunan terbuka dan  $\mathbf{f} \in C^1(L)$  dengan  $C^1$  merupakan notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di  $L$ . Sistem (2.14) dapat ditulis sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \end{bmatrix}$$



atau

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T\end{aligned}$$

#### 2.4.1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Secara umum, sistem persamaan diferensial linear orde satu dengan variabel tak bebas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan variabel bebas  $t$ , dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + g_n(t)\end{aligned}\tag{2.15}$$

Jika  $g_i, i = 1, 2, \dots, n$  bernilai nol, maka sistem (2.15) disebut sistem persamaan diferensial linear homogen, sedangkan jika bernilai tak nol, maka sistem (2.15) disebut sistem persamaan diferensial linear nonhomogen.

Sistem (2.15) dapat dinyatakan dalam suatu persamaan berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + G(t)\tag{2.16}$$

dengan  $A$  adalah matriks  $n \times n$  yang merupakan matriks koefisien dari variabel tak bebas  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dengan  $a_{ij} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n$  dan  $G(t)$  adalah matriks ukuran  $n \times 1$  yang merupakan fungsi dari  $t$ ,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

### Contoh 2.5

Berikut ini diberikan sistem persamaan diferensial linear

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases} \quad (2.17)$$

Sistem persamaan diferensial (2.17) merupakan persamaan diferensial linear homogen.

### 2.4.2. Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

#### Definisi 2.7 (Ross, 1984)

*Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear.*

Persamaan diferensial dikatakan nonlinear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut (Ross, 1984)

- (i) Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.
- (ii) Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan/atau turunan-turunannya.
- (iii) Terdapat fungsi transedental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

### Contoh 2.6

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2 \end{cases} \quad (2.18)$$

Sistem (2.18) merupakan sistem persamaan diferensial nonlinear dengan variabel bebas  $t$  dan variabel tak bebas  $x_1$  dan  $x_2$ . Sistem (2.18) dikatakan sistem diferensial nonlinear karena terdapat perkalian antara variabel takbebas  $x_1$  dan  $x_2$  pada persamaan pertama, dan pada persamaan kedua terdapat kuadrat dari variabel takbebas  $x_1$ .

### 2.5. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium merupakan titik tetap yang tidak berubah terhadap waktu.

Secara matematis, titik ekuilibrium didefinisikan sebagai berikut

**Definisi 2.8** (Wiggins, 1990)

*Diberikan sistem persamaan diferensial (2.14). Titik  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  disebut titik ekuilibrium dari Sistem (2.14) jika memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$ .*

### Contoh 2.7

Diberikan sistem persamaan diferensial (2.18). Misalkan  $\dot{x} = f(x)$ , maka sistem

(2.18) dapat dinyatakan sebagai  $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + x_1 \\ 2x_1^2 - x_2 \end{pmatrix}$ .

Titik ekuilibrium dari sistem (2.18) dapat diperoleh jika  $f(\bar{x}) = 0$ , sehingga sistem tersebut menjadi

$$\bar{x}_1 x_2 + \bar{x}_1 = 0$$

$$\bar{x}_1(\bar{x}_2 + 1) = 0$$

$$\bar{x}_1 = 0 \text{ dan } \bar{x}_1 = -1$$

Saat  $\bar{x}_1 = 0$ , maka

$$2\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 = 0$$

$$-\bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_2 = 0$$

Diperoleh titik ekuilibrium  $(0,0)^T$ .

Saat  $\bar{x}_1 = -1$ , maka

$$2\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2 = 0$$

$$2 - \bar{x}_2 = 0$$

$$\bar{x}_2 = 2$$

Diperoleh titik ekuilibrium  $(-1,2)^T$ .

Sehingga dari sistem (2.18) diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu  $(0,0)^T$  dan  $(-1,2)^T$ .

## 2.6. Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Nonlinear

Linearisasi merupakan proses membawa suatu sistem nonlinear menjadi sistem linear. Linearisasi dilakukan pada sistem nonlinear untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Linearisasi pada sistem nonlinear dimaksudkan untuk memperoleh aproksimasi yang baik.

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{2.19}$$

dengan  $\mathbf{x} \in L \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $f: L \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{f}$  fungsi nonlinear dan kontinu. Diberikan pula  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  dan  $\mathbf{f} \in C^n(L)$ . Misalkan  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  adalah titik ekuilibrium dari sistem (2.19), maka pendekatan linear untuk sistem (2.19) diperoleh dengan menggunakan ekspansi Taylor disekitar titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T$  yaitu

$$\begin{aligned}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1} \\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2} \\
&\vdots \\
f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T &= f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Pendekatan linear untuk Sistem (2.20) adalah

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_1} \\
\dot{x}_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_2} \\
&\vdots \\
\dot{x}_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_1 - \bar{x}_1) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_2 - \bar{x}_2) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T(x_n - \bar{x}_n) + R_{f_n}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

dengan  $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$  merupakan bagian nonlinear yang selanjutnya dapat diabaikan karena nilai  $R_{f_1}, R_{f_2}, \dots, R_{f_n}$  mendekati nol. Sehingga sistem (2.21) dapat ditulis sebagai matriks

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - \bar{x}_1) \\ (x_2 - \bar{x}_1) \\ \vdots \\ (x_n - \bar{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Misalkan  $y_1 = x_1 - \bar{x}_1$ ,  $y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, y_n = x_n - \bar{x}_n$ , maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$\text{dengan } J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^T \end{bmatrix}$$

adalah matriks jacobian pada titik ekuilibrium  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ .

Jika  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$  tidak memiliki nilai eigen yang bernilai nol pada bagian realnya, maka sifat kestabilan sistem (2.19) dapat dilihat dari

$$\dot{\mathbf{y}} = J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))\mathbf{y}. \quad (2.24)$$

Sistem (2.24) disebut sebagai hasil linearisasi Sistem (2.19).

Setelah linerisasi dilakukan pada sistem (2.19), perilaku kestabilan sistem nonlinear di sekitar titik ekuilibrium dapat diselidiki melalui perilaku linearisasi di sekitar titik yang sama, jika titik ekuilibrium dari sistem nonlinear tersebut hiperbolik. Berikut diberikan definisi titik ekuilibrium hiperbolik.

**Definisi 2.9 (Perko, 2001)**

*Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  disebut titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (2.19) jika bagian real nilai eigen dari  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})) \neq 0$ . Jika bagian real nilai eigen  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$  bernilai 0 maka titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  disebut nonhiperbolik.*

**Contoh 2.8**

Diberikan sistem persamaan diferensial nonlinear (2.18). Sistem (2.18) mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu  $(0,0)^T$  dan  $(-1,2)^T$ . Akan dicari matriks  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$  dengan  $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0,0)^T$ ,  $\bar{\mathbf{x}}_2 = (-1,2)^T$  dan akan diidentifikasi apakah masing-masing titik ekuilibrium tersebut hiperbolik atau nonhiperbolik.

Matriks Jacobian dari sistem (2.18) adalah

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})^T = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ 4x_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobian untuk  $\bar{\mathbf{x}}_1 = (0,0)^T$  adalah

$$J(\mathbf{f}(0,0)^T) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

akan dicari nilai eigen untuk  $J(\mathbf{f}(0,0)^T)$

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0 - \gamma & 0 \\ 0 & 1 - \gamma \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & 1 - \gamma \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & -\gamma(1 - \gamma) = 0. \end{aligned}$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu  $\gamma = 0$  dan  $\gamma = 1$ . Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium  $\bar{x}_1 = (0,0)^T$  adalah titik ekuilibrium nonhiperbolik karena terdapat nilai eigen nol dibagian realnya.

Kemudian, matriks jacobian untuk  $\bar{x}_2 = (-1,2)^T$  adalah

$$J(f(-1,2)^T) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

akan dicari nilai eigen untuk  $J(f(-1,2)^T)$

$$\begin{vmatrix} 2-\gamma & 0 \\ -4 & 1-\gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\gamma)(1-\gamma) = 0.$$

Diperoleh dua nilai eigen, yaitu  $\gamma = 2$  dan  $\gamma = 1$ . Dapat disimpulkan bahwa titik ekuilibrium  $\bar{x}_2 = (-1,2)^T$  adalah titik ekuilibrium hiperbolik karena tidak terdapat nilai eigen yang bagian realnya bernilai nol. Sehingga, perilaku kestabilan sistem linear di sekitar titik ekuilibrium  $(-1,2)^T$  sama dengan perilaku sistem nonlinearnya.

Selanjutnya, akan diberikan definisi dan teorema kestabilan di sekitar titik ekuilibrium.

## 2.7. Kestabilan Titik ekuilibrium

Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial baik linear maupun nonlinear diberikan dalam definisi berikut.

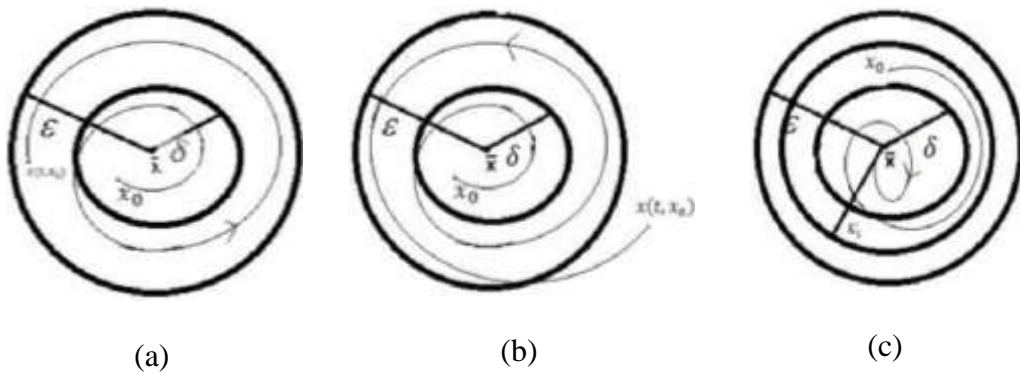


**Definisi 2.10** (Olsder and Woude, 2004)

Diberikan sistem persamaan diferensial orde satu (2.14) dan  $x(t, x_0)$  adalah solusi persamaan (2.14) pada saat  $t$  dengan kondisi awal  $x(0) = x_0$ .

- (i) Vektor  $\bar{x}$  memenuhi  $f(\bar{x}) = 0$  dikatakan sebagai titik ekuilibrium.
- (ii) Titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dikatakan stabil jika diberikan  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  sedemikian sehingga jika  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$  (dengan  $\|\cdot\|$  adalah norm pada  $\mathbb{R}^n$ ), maka  $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$  untuk  $t \geq 0$ .
- (iii) Titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dikatakan stabil asimtotik jika titik titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat  $\delta_1 > 0$  sedemikian sehingga  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ , asalkan  $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$ .
- (iv) Titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi (ii).

Berikut simulasi titik ekuilibrium stabil dan titik ekuilibrium stabil asimtotik



Gambar 1. Simulasi kestabilan titik ekuilibrium stabil (a), tidak stabil (b), dan stabil asimtotik (c)

Matriks jacobian  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$  dapat digunakan untuk untuk mengidentifikasi sifat kestabilan sistem nonlinear di sekitar titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  asalkan titik ekuilibrium sistem tersebut adalah titik ekuilibrium hiperbolik. Berikut diberikan teorema mengenai sifat kestabilan suatu sistem nonlinear yang ditinjau dari nilai eigen matriks jacobian  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$ .

**Teorema 2.1** (Olsder and Woude, 2004)

- (i) *Diberikan semua bagian real nilai eigen matriks jacobian  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$  bernilai negatif, maka titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  dari sistem (2.19) stabil asimtotik lokal.*
- (ii) *Sementara, jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks jacobian  $J(\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}))$  yang bagian realnya positif maka titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}}$  dari sistem (2.19) tidak stabil.*

Selanjutnya, diberikan pula teorema yang menyajikan sifat kestabilan suatu sistem  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  dengan nilai eigen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, (k \leq n)$ .

**Teorema 2.2** (Olsder and Woude, 2004)

*Diberikan sistem persamaan diferensial  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ , dengan  $A$  suatu matriks  $n \times n$  yang mempunyai  $k$  nilai eigen berbeda  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  dengan  $k \leq n$ .*

- (i) *Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika  $\Re \gamma_i < 0$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .*
- (ii) *Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  dikatakan stabil jika dan hanya jika  $\Re \gamma_i \leq 0$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$  dan jika setiap nilai eigen  $\gamma$ , imajiner dengan  $\Re \gamma_i = 0$ , maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.*

(iii) Titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat paling sedikit satu  $\Re \gamma_i > 0$  untuk  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Bukti:

(i) Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil asimtotik, maka  $\Re \gamma_i < 0$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .

Berdasarkan definisi (2.10), titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  dikatakan stabil asimtotik jika  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$ . Hal ini berarti bahwa untuk  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t, x_0)$  akan menuju  $\bar{x} = 0$ . Karena  $x(t, x_0)$  merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka  $x(t, x_0)$  memuat  $e^{\Re(\gamma_i)t}$ . Sehingga, agar  $e^{\Re(\gamma_i)t}$  menuju  $\bar{x} = 0$ , maka  $\gamma$  haruslah bernilai negatif.

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika  $\Re \gamma_i < 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil asimtotik.

$x(t, x_0)$  merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka  $x(t, x_0)$  selalu memuat  $e^{\Re(\gamma_i)t}$ . Jika  $\Re \gamma_i < 0$ , maka untuk  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t, x_0)$  akan menuju  $\bar{x} = 0$ . Sehingga, berdasarkan definisi (2.10), titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil asimtotik.

(ii) Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil, maka  $\Re \gamma_i \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

Andaikan  $\Re \gamma_i > 0$ , maka solusi persamaan diferensial  $x(t, x_0)$  yang selalu memuat  $e^{\Re(\gamma_i)t}$  akan menuju  $\infty$  (menjauh dari titik ekuilibrium

$\bar{x} = 0$ ) untuk  $t \rightarrow \infty$ , sehingga sistem tidak stabil. Hal ini sesuai dengan kontraposisi pernyataan jika titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil, maka  $\Re \gamma_i \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ . Jadi terbukti bahwa jika titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil, maka  $\Re \gamma_i \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

#### Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika  $\Re \gamma_i \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil dan jika ada  $\Re \gamma_i = 0$ , maka multiplisitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.

$x(t, x_0)$  merupakan solusi dari sistem persamaan diferensial, maka  $x(t, x_0)$  selalu memuat  $e^{\Re(\gamma_i)t}$ . Jika  $\Re \gamma_i < 0$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{x} = 0$  stabil asimtotik (pasti stabil). Jika  $\Re \gamma_i = 0$ , maka nilai eigen berupa bilangan kompleks murni. Multiplisitas aljabar berhubungan dengan nilai eigen sedangkan geometri berhubungan dengan vektor eigen (Luenberger dalam skripsi Widayati). Sehingga akan dibuktikan bahwa banyak nilai eigen dan vektor eigen adalah sama.

Tanpa mengurangi keumuman, diambil sembarang sistem pada  $\mathbb{R}^2$  yang mempunyai nilai eigen bilangan kompleks murni.

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ dengan } p > 0, q > 0 \quad (2.25)$$

Akan ditentukan nilai eigen dari sistem (2.25)

$$\begin{aligned} |A - \gamma I| &= 0 \\ \begin{bmatrix} 0 & -p \\ q & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} &= 0 \\ \begin{bmatrix} -\gamma & -p \\ q & -\gamma \end{bmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\gamma^2 + pq = 0$$

Akar dari persamaan di atas

$$\begin{aligned}\gamma_{1,2} &= \frac{\pm\sqrt{-4pq}}{2} \\ &= \frac{\pm 2i\sqrt{pq}}{2} = \pm i\sqrt{pq} \\ \gamma_1 &= i\sqrt{pq} \quad \text{atau} \quad \gamma_2 = -i\sqrt{pq}\end{aligned}$$

Vektor eigen

Berdasarkan definisi,  $y = (y_1, y_2)^T$  adalah vektor eigen dari  $A$  yang bersesuaian dengan  $\gamma$  jika dan hanya jika  $y$  adalah pemecahan taktrivial dari  $(A - \gamma I)y = 0$

$$\begin{bmatrix} -\gamma & -p \\ q & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Untuk  $\gamma_1 = i\sqrt{pq}$ , maka (2.26) menjadi

$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{pq} & -p \\ q & -i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks augmented dari sistem yaitu

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{cc|c} -i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] \text{ baris pertama dikali dengan } \left( \frac{1}{pq} i\sqrt{pq} \right) \\ & \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ q & -i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] \text{ baris kedua dikali dengan } \left( \frac{1}{q} \right) \\ & \quad \text{kemudian dikurangi baris pertama} \\ & \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]\end{aligned}$$

diperoleh

$$y_1 - \frac{i\sqrt{pq}}{q}y_2 = 0$$

$$y_1 = \frac{i\sqrt{pq}}{q}y_2$$

misal  $y_2 = t$ , maka  $y_1 = \frac{i\sqrt{pq}}{q}t$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q}t \\ t \end{bmatrix}, \text{ diambil } t = 1, \text{ diperoleh } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\gamma_1 = i\sqrt{pq}$  adalah

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Untuk  $\gamma_2 = -i\sqrt{pq}$ , maka sistem (2.16) menjadi

$$\begin{bmatrix} i\sqrt{pq} & -p \\ q & i\sqrt{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matriks augmented dari sistem yaitu

$$\left[ \begin{array}{cc|c} i\sqrt{pq} & -p & 0 \\ q & i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] \text{ baris pertama dikali dengan } \left( -\frac{1}{pq}i\sqrt{pq} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ q & i\sqrt{pq} & 0 \end{array} \right] \text{ baris kedua dikali dengan } \left( \frac{1}{q} \right)$$

$$\text{kemudian dikurangi baris pertama}$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & \frac{i\sqrt{pq}}{q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

diperoleh

$$y_1 + \frac{i\sqrt{pq}}{q}y_2 = 0$$

$$y_1 = -\frac{i\sqrt{pq}}{q}y_2$$

misal  $y_2 = t$ , maka  $y_1 = -\frac{i\sqrt{pq}}{q}t$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i\sqrt{pq}}{q}t \\ t \end{bmatrix}, \text{ diambil } t = -1, \text{ diperoleh } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga vektor eigen yang bersesuaian dengan  $\gamma_2 = -i\sqrt{pq}$  adalah

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{i\sqrt{pq}}{q} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sehingga terbukti bahwa banyaknya nilai eigen sama dengan vektor eigen.

(iii) Bukti ke kanan

Akan dibuktikan bahwa jika titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  tidak stabil, maka  $\Re \gamma_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  tidak stabil, jika untuk  $t \rightarrow \infty$  solusi persamaan diferensial  $x(t, x_0)$  akan menuju  $\infty$ . Hal ini dapat terpenuhi jika  $\Re \gamma_i > 0$ .

Bukti ke kiri

Akan dibuktikan bahwa jika  $\Re \gamma_i > 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ , maka titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} = 0$  tidak stabil.

Diketahui bahwa jika  $\Re \gamma_i > 0$ , maka solusi persamaan diferensial  $x(t, x_0)$  yang memuat  $e^{\Re(\gamma_i)t}$  akan selalu menuju  $\infty$ . Sehingga titik ekuilibrium tidak stabil.

Titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  dikatakan stabil asimtotik lokal jika semua nilai eigen matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif. Sementara itu, titik ekuilibrium  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  dikatakan stabil asimtotik global jika untuk sebarang nilai

awal  $x(t_0)$  yang diberikan, solusi sistem (2.14)  $x(t)$  berada dekat dengan titik ekuilibrium  $\bar{x}$  dan untuk  $t$  membesar menuju tak hingga,  $x(t)$  konvergen ke titik ekuilibrium  $\bar{x}$ .

### Contoh 2.9

Diberikan sistem (2.18). Akan diselidiki tipe kestabilan dari sistem (2.18) disekitar titik ekuilibrium  $\bar{x} = (0,0)^T$

Berdasarkan analisa pada contoh 2.8 diperoleh bahwa titik ekuilibrium  $(0,0)^T$  merupakan titik ekuilibrium nonhiperbolik. Sehingga kestabilan sistem di sekitar titik ekuilibrium  $(0,0)^T$  tidak dapat ditentukan. Sementara, titik ekuilibrium  $(-1,2)^T$  merupakan titik ekuilibrium hiperbolik, sehingga perilaku kestabilan sistem linear di sekitar titik ekuilibrium  $(-1,2)^T$  sama dengan perilaku sistem nonlinearnya yaitu tidak stabil karena terdapat bagian real dari nilai eigen matriks jacobian  $J(f(-1,2)^T)$  bernilai positif.

## 2.8. Radius Spektral

**Definisi 2.11** (Rahayu, 2005)

*Diberikan  $A$  adalah matriks  $n \times n$  dan  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$ , maka radius spektral dari matriks  $A$  didefinisikan sebagai*

$$\rho(A) = \max_{i=1,2,\dots,n} \{|\gamma_i|\}.$$



## 2.9. Bilangan Reproduksi Dasar

Suatu model biasanya memiliki parameter *threshold* yang dikenal sebagai bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ), sedemikian sehingga jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit stabil simtotik lokal dan penyakit tidak menyerang populasi, namun jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan penyakit sangat mungkin untuk menyebar (Driessche dan Watmough, 2001).

Secara istilah, penyakit memiliki definisi yang lebih luas dari definisi klinis yaitu mencakup tahap asimtomatik infeksi serta gejala artinya bahwa yang dimaksud individu yang terinfeksi adalah individu yang terkena penyakit dengan menunjukkan gejala maupun yang tidak menunjukkan gejala (Widayati, 2013).

Misalkan terdapat  $n$  kelas terinfeksi dan  $m$  kelas tidak terinfeksi. Selanjutnya dimisalkan pula  $x$  menyatakan subpopulasi kelas terinfeksi dan  $y$  menyatakan subpopulasi kelas tidak terinfeksi (rentan dan atau sembuh), dan  $x \in \mathbb{R}^n$  dan  $y \in \mathbb{R}^m$ , untuk  $m, n \in \mathbb{N}$ , sehingga

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varphi_i(x, y) - \psi_i(x, y), \text{ dengan } i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{y} &= \eta_j(x, y), \text{ dengan } j = 1, 2, 3, \dots, m\end{aligned}$$

dengan  $\varphi_i$  adalah laju infeksi sekunder yang menambah pada kelas terinfeksi dan  $\psi_i$  adalah laju perkembangan penyakit, kematian, dan atau kesembuhan yang mengakibatkan berkurangnya populasi dari kelas terinfeksi.

Penghitungan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) berdasarkan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit.

Persamaan kompartemen terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = (F - V)\mathbf{x}$$

dengan  $F$  dan  $V$  adalah matriks berukuran  $n \times n$ , dan  $F = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$  dan  $V = \frac{\partial \psi_i}{\partial u_j}(0, y_0)$ .

Selanjutnya didefinisikan matriks  $K$  sebagai

$$K = FV^{-1}$$

dengan  $K$  disebut sebagai *next generation matrix*. Nilai harapan dari infeksi sekunder pada populasi rentan adalah radius spektral (nilai eigen dominan) dari matriks  $K$  (Driesse dan Watmough, 2001) sehingga

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}).$$

### Contoh 2.10

Diberikan sistem persamaan diferensial berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= \mu - \beta S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t)\end{aligned}\tag{2.27}$$

dengan  $S(t)$  menyatakan populasi individu rentan pada saat  $t$ ,  $I(t)$  menyatakan populasi individu terinfeksi pada saat  $t$ , dan  $R(t)$  menyatakan populasi individu sembuh dari infeksi pada saat  $t$ . Sistem (2.27) mempunyai titik ekuilibrium bebas

penyakit  $P_0 = (1,0,0)$ . *Next generation matrix* dapat diperoleh dari kelas  $I$ , sehingga kelas  $I$  dapat dituliskan sebagai

$$\dot{I}(t) = \varphi((S, R), I) - \psi((S, R), I)$$

dengan  $\varphi = [\beta S(t)I(t)]$  dan  $\psi = [\gamma I(t) + \mu I(t)]$ ,

maka hasil linearisasi dari  $\varphi$  dan  $\psi$  masing-masing adalah  $F = [\beta S(t)]$  dan  $V = [\gamma + \mu]$ . Sehingga diperoleh *Next generation matrix* berikut

$$K = FV^{-1} = [\beta S(t)] \left[ \frac{1}{\gamma + \mu} \right] = \frac{\beta S(t)}{\gamma + \mu} \quad (2.28)$$

Selanjutnya substitusikan nilai titik ekuilibrium bebas penyakit  $P_0 = (1,0,0)$  ke persamaan (2.28) diperoleh

$$K = \frac{\beta}{\gamma + \mu}.$$

Maka diperoleh nilai  $R_0$  dari sistem (2.27) adalah

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma + \mu}.$$

## 2.10. Kriteria Routh-Hurwitz

Nilai eigen dapat diperoleh dengan menentukan akar-akar persamaan karakteristik  $p(\gamma) = |A - \gamma I| = \gamma^n + p_1\gamma^{n-1} + p_2\gamma^{n-2} + \dots + p_n$ . Namun seringkali akar-akar persamaan karakteristik tidak mudah ditentukan. Sehingga diperlukan suatu aturan/kriteria yang menjamin bahwa akar-akar persamaan karakteristik bernilai negatif atau ada persamaan karakteristik yang bernilai positif. Tanda

negatif ataupun positif di sini dapat digunakan untuk menentukan sifat kestabilan dari suatu titik ekuilibrium.

Berikut diberikan teorema-teorema mengenai kriteria *Routh Hurwitz*.

**Teorema 2.3** (Hahn W, 1967)

*Jika pembuat nol pada persamaan*

$$p(\gamma) = p_0\gamma^n + p_1\gamma^{n-1} + p_2\gamma^{n-2} + \dots + p_{n-1}\gamma + p_n \quad (2.29)$$

*mempunyai bagian real yang negatif, maka*

$$\frac{p_1}{p_0} > 0, \frac{p_3}{p_0} > 0, \dots, \frac{p_n}{p_0} > 0 \quad (2.30)$$

Tanpa mengurangi keumuman, diambil  $p_0$  positif sehingga seluruh koefisien dari polinomial (2.29) bertanda sama, sehingga dapat dibentuk

$$\begin{aligned} c_{10} &= p_0, c_{20} = p_2, c_{30} = p_4, \dots \\ c_{11} &= p_1, c_{21} = p_3, c_{31} = p_5, \dots \\ r_2 &= \frac{p_0}{p_1} \left| c_{12} = p_2 - r_2 a_3, c_{22} = p_4 - r_2 a_5, \dots \right. \\ r_2 &= \frac{c_{11}}{c_{12}} \left| c_{13} = c_{21} - r_3 c_{22}, c_{23} = c_{31} - r_3 c_{32}, \dots \right. \\ &\vdots \\ r_j &= \frac{c_{1,j-2}}{c_{1,j-1}} \left| c_{ij} = c_{i+1,j-2} - r_j c_{i+1,j-2}; \begin{matrix} i=1,2,\dots \\ j=2,3,\dots \end{matrix} \right. \\ &\dots \\ c_{1n} &= p_n \end{aligned}$$

Jika  $n = 2m$  maka  $c_{m+1,0} = c_{m+1,2} = p_n = c_{m+1,1} = c_{m+1,3} = 0$

Jika  $n = 2m - 1$  maka  $c_{m,0} = p_{n-1}, c_{m,1} = p_n = c_{m,2} = c_{m,3} = 0$

**Teorema 2.4** (Hanh W, 1967)

*Pembuat nol dari polinomial (2.29) mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika dipenuhi pertidaksamaan (2.30) dan*

$$c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0 \quad (2.31)$$

Selanjutnya dibentuk matriks-matriks dengan entri-entrinya merupakan koefisien dari polinomial (2.29)

$$H = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & p_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Matriks (2.32) disebut sebagai Matriks Hurwitz. Determinan matriks Hurwitz tingkat  $k$  dinotasikan dengan  $\Delta_k$  yang didefinisikan sebagai

$$\Delta_1 = p_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \dots & 0 & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & p_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix}$$

yang dibentuk dari Matriks Hurwitz  $H$  berukuran  $n \times n$ .

**Teorema 2.5 (Hanh W, 1967:23)**

*Pembuat nol polinomial (2.29) mempunyai bagian real yang negatif jika dan hanya jika dipenuhi persamaan (2.30) dan*

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0 \quad (2.33)$$

Bukti

Matriks (2.32) dibentuk menjadi matriks segitiga atas sehingga ada diagonal utamanya adalah  $c_{11} = p_1, c_{12}, \dots, c_{1n}$ . Akibatnya, diperoleh subdeterminan berikut

$$\Delta_1 = p_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ 0 & c_{12} \end{vmatrix} = p_1 c_{12}, \dots, \Delta_i = c_{11} c_{12} \dots c_{1i}, \dots$$

atau

$$p_1 = c_{11} = \Delta_1, c_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, c_{1i} = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}. \quad (2.34)$$

Bukti kekanan

Diketahui pembuat nol dari polinomial (2.29) mempunyai bagian real negatif.

Akan ditunjukkan bahwa

$$\frac{p_1}{p_0} > 0, \frac{p_3}{p_0} > 0, \dots, \frac{p_n}{p_0} > 0 \text{ dan } \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Berdasarkan teorema 2.3 diketahui bahwa  $\frac{p_1}{p_0} > 0, \frac{p_3}{p_0} > 0, \dots, \frac{p_n}{p_0} > 0$ . Selanjutnya

akan ditunjukkan bahwa  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ . Berdasarkan teorema 2.4 diperoleh bahwa  $c_{11} > 0, c_{12} > 0, \dots, c_{1n} > 0$ .

Berdasarkan persamaan (2.34) diperoleh

$$p_1 = \Delta_1 = c_{11} > 0, \text{ maka } \Delta_1 > 0$$

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1} = c_{12} > 0, \text{ maka } \Delta_2 > 0$$

$\vdots$

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = c_{1n} > 0, \text{ maka } \Delta_n > 0.$$

Sehingga terbukti bahwa  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ .

#### Bukti kekiri

Diketahui  $\frac{p_1}{p_0} > 0, \frac{p_3}{p_0} > 0, \dots, \frac{p_n}{p_0} > 0$  dan  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ . Akan ditunjukkan bahwa pembuat nol dari polinomial (2.29) mempunyai bagian real negatif.

Diketahui bahwa

$$c_{11} = \Delta_1 > 0,$$

$$\Delta_2 > 0, \text{ maka } c_{12} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} > 0,$$

$\vdots$

$$\Delta_n > 0, \text{ maka } c_{1n} = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} > 0$$

sehingga berdasarkan teorema 2.4, pembuat nol dari polinomial (2.29) mempunyai bagian real negatif. Akibatnya, pembuat nol dari polinomial berderajat  $n = 2, 3$  mempunyai bagian real negatif jika dipenuhi

(i) Untuk  $n = 2, p_1 > 0$  dan  $p_2 > 0$

(ii) Untuk  $n = 3, p_1 > 0, p_3 > 0$  dan  $p_1 p_2 > p_3$ .

### 2.11. Limit superior dan limit inferior

Berikut ini diberikan definisi limit superior dan limit inferior yang digunakan dalam bab selanjutnya.

**Definisi 2.12** (Jain and Gupta, 1986)

Diberikan  $\{a_n\}$  adalah barisan, untuk setiap  $n \in N$ .

Selanjutnya diberikan pula  $M_k = \sup_{n \geq k} a_n$  dan  $m_k = \inf_{n \geq k} a_n$ .

Maka limit superior dari  $\{a_n\}$  yang selanjutnya dapat dinotasikan dengan

$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$  atau  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  atau  $\overline{\lim} a_n$  didefinisikan sebagai

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{k \geq 1} M_k = \inf_{k \geq 1} \sup_{n \geq k} \{a_n\}.$$

Sedangkan limit inferior dari  $\{a_n\}$  yang selanjutnya dapat dinotasikan dengan

$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$  atau  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$  atau  $\underline{\lim} a_n$  didefinisikan sebagai

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{k \geq 1} m_k = \sup_{k \geq 1} \inf_{n \geq k} \{a_n\}.$$

Berdasarkan definisi di atas, jelas bahwa  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ , dan barisan

$\{a_n\}$  konvergen ke  $l$  jika dan hanya jika  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ .

#### Contoh 2.11

Diberikan barisan  $\{a_n\} = \left(\frac{1}{n}, n \in N\right)$ , akan ditunjukkan bahwa  $\{a_n\}$  konvergen ke 0

Bukti:



Misalkan  $M_k = \sup_{n \geq k} \{a_n\} = \sup_{n \geq k} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots \right\} = \frac{1}{k}$ . Karena  $n \geq k$ , maka

$M_k = \frac{1}{k}$ . Sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n = \inf_{k \geq 1} M_k = \inf_{k \geq 1} \left\{ \frac{1}{k} \right\} = 0$ .

Misalkan  $m_k = \inf_{n \geq k} \{a_n\} = \inf_{n \geq k} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \dots \right\} = 0$ . Maka  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_n\} =$

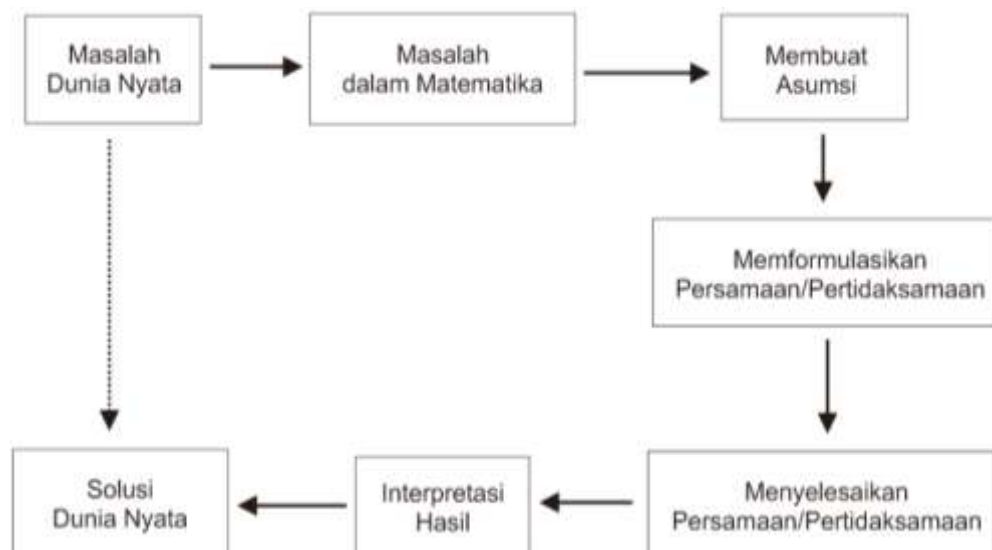
$\sup_{k \geq 1} m_k = \sup_{k \geq 1} \{0\} = 0$ .

Sehingga  $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_n\} = 0$ . Terbukti bahwa  $\{a_n\}$  konvergen ke 0.

## 2.12. Model Matematika

Pemodelan matematika merupakan suatu studi tentang konsep matematika yang merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan di dunia nyata ke dalam pernyataan matematika.

Terdapat beberapa tahap dalam menyusun model matematika yang dapat dinyatakan dalam alur diagram berikut (Widowati, 2007)



Gambar 2. Proses memodelkan

Keterangan gambar:

1. Memodelkan masalah dunia nyata ke dalam matematika

Pada langkah ini permasalahan dunia nyata dimodelkan ke dalam bahasa matematis. Langkah ini meliputi pemahaman pada karakteristik permasalahan yang akan dimodelkan kemudian membatasi permasalahan yang akan dibahas. Identifikasi dan pembatasan masalah menghasilkan variabel-variabel yang dapat dibentuk beberapa hubungan antar variabel-tersebut. Kemudian menjabarkan variabel-variabel dan sistem menjadi model.

2. Membuat asumsi

Dalam mengkontruksi model, perlu dibuat asumsi. Asumsi di sini mencerminkan bagaimana proses berpikir sehingga model dapat berjalan.

3. Formulasi persamaan/pertidaksamaan

Dengan asumsi dan hubungan antara variabel-variabel, langkah selanjutnya yaitu memformulasikan persamaan atau sistem persamaan. Formulasi model merupakan langkah paling penting, sehingga kadang perlu adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar langkah formulasi persamaan (kumpulan persamaan) yang sesuai sehingga dapat diselesaikan dan reliistik. Jika pada proses pengujian kembali, model yang terbentuk tidak sesuai maka perlu dilakukan pengkajian ulang asumsi dan membentuk asumsi yang baru.

#### 4. Menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan

Setelah model diformulasikan, langkah selanjutnya yaitu menyelesaikan persamaan tersebut secara matematis. Dalam menyelesaikan persamaan/pertidaksamaan ini perlu hati-hati dan fleksibilitas dalam proses pemodelan secara menyeluruh.

#### 5. Interpretasi Hasil

Interpretasi model atau solusi merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula matematika dengan kembali ke masalah dunia nyata. Interpretasi ini dapat diwujudkan dalam berbagai cara seperti grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh.

## **BAB III**

### **PEMBAHASAN**

#### **3.1. Formulasi Model Matematika**

Secara umum, istilah hepatitis berarti peradangan hati yang disebabkan virus, bahan kimia, obat-obatan dan alkohol. Namun, penyebab terbanyak dari penyakit hepatitis adalah virus. Berdasarkan tipenya, hepatitis dibedakan menjadi hepatitis A, B, C, D, F, dan G. Sedangkan berdasarkan perjalanan penyakitnya, hepatitis dibedakan menjadi hepatitis akut dan hepatitis kronis. Infeksi hepatitis C dikatakan kronis jika deteksi RNA HCV dalam darah menetap sekurang-kurangnya 6 bulan. Penyakit hepatitis C disebabkan oleh virus hepatitis C (HCV). Virus hepatitis C dapat menular melalui kontak darah antar individu, dan resiko tertinggi terjadi saat penggunaan jarum suntik narkoba secara bersama-sama.

Individu baru dapat masuk ke dalam populasi karena adanya kelahiran atau rekrutmen dan mereka meninggalkan populasi karena kematian atau perpindahan (emigrasi). Populasi total adalah semua individu yang rentan untuk tertular hepatitis C, terinfeksi hepatitis C maupun yang telah sembuh dari hepatitis C. Dalam kasus ini, individu yang rentan terinfeksi adalah pengguna narkoba suntik. Laju rekrutmen pengguna narkoba suntik yang baru menentukan pertambahan individu rentan (pengguna narkoba suntik) dalam populasi. Individu rentan akan mengalami dua kemungkinan, yaitu sebagian kecil akan meninggal dan yang lainnya akan terinfeksi hepatitis C akut apabila mengalami kontak dengan individu yang terinfeksi akut maupun kronis. Tingkat infeksi dipengaruhi oleh

seberapa sering terjadinya kontak atau peminjaman jarum suntik antar pengguna narkoba suntik. Individu yang lebih sering menggunakan jarum suntik secara bersama-sama akan lebih berisiko untuk terinfeksi hepatitis C.

Penderita hepatitis C berada dalam fase akut sekitar 6-10 minggu. Sebagian besar penderita infeksi akut akan berkembang menjadi kronis, sedangkan sebagian kecil akan sembuh dengan sendirinya ataupun meninggal. Penderita hepatitis C akut yang berkembang menjadi kronis akan mengalami sirosis hati (pengerasan hati) dalam waktu 15-20 tahun atau dapat pula menjadi kanker hati setelah 20-30 tahun, atau akan meninggal. Hampir semua kematian dari penderita Hepatitis C berhubungan dengan komplikasi sirosis dan kanker hati, sehingga kematian karena infeksi virus hepatitis C sangat kecil.

Model matematika pada penyebaran virus hepatitis C ini, populasi manusia pada waktu  $t$  terbagi dalam 4 subpopulasi, yaitu *susceptible* (rentan), *acute infection* (terinfeksi akut), *chronic carrier* (terinfeksi kronis), dan *recovered* (sembuh). Individu yang termasuk dalam subpopulasi *susceptible* adalah semua pengguna narkoba suntik yang belum terinfeksi virus Hepatitis C. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *acute infection* adalah individu rentan yang mengalami kontak dengan individu yang terinfeksi virus Hepatitis C, sehingga individu tersebut menjadi terinfeksi. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *chronic carrier* adalah semua individu yang mengalami perkembangan penyakit dari fase akut karena hati tidak dapat mengobati/menghilangkan virus hepatitis C dari dalam tubuh dengan sendirinya. Sedangkan individu yang termasuk dalam subpopulasi *recovered* adalah individu yang telah benar-benar sembuh atau

terbebas dari virus hepatitis C. individu yang mengalami sirosis maupun kanker hati dapat dikatakan telah terbebas dari virus hepatitis C.

Untuk mempermudah proses memodelkan penyebaran virus Hepatitis C khususnya pada pengguna narkoba melalui jarum suntik, diperlukan asumsi-asumsi. Berikut asumsi-asumsi yang digunakan:

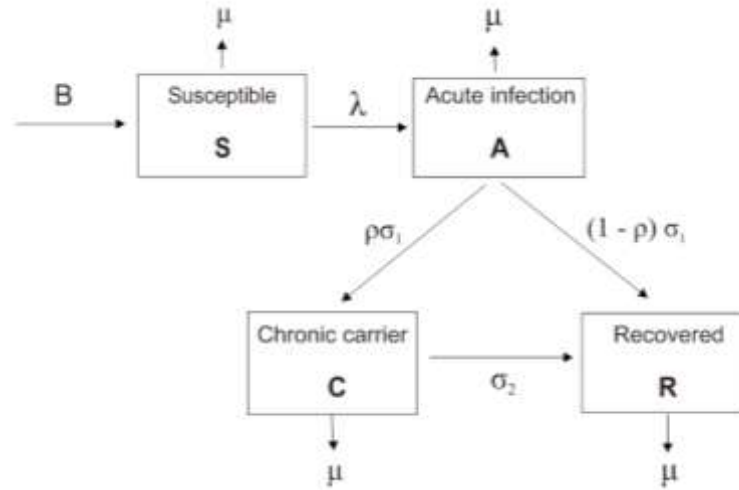
1. Populasi penduduk bersifat konstan dan tertutup, artinya bahwa penambahan atau pengurangan populasi terjadi hanya karena rekrutmen dan kematian, dimana laju rekrutmen sama dengan laju kematian,
2. populasi bersifat homogen, artinya bahwa setiap orang memiliki resiko yang sama untuk tertular virus dan frekuensi penggunaan jarum suntik secara bersama-sama (tidak steril) adalah konstan,
3. individu yang belum terserang penyakit masuk ke dalam kelas *susceptible*,
4. kematian akibat terinfeksi virus hepatitis C diabaikan, hanya terjadi kematian alami pada setiap subpopulasi.
5. penyakit menular melalui kontak langsung antara individu *Susceptible* dengan individu *Acute infection* dan/atau individu *Chronic carrier* dengan melalui penggunaan jarum suntik yang tidak steril,
6. individu pada kelas *Acute Infection* dapat mengalami perkembangan infeksi menjadi pembawa (kronis) yang kemudian masuk menjadi individu *Chronic carrier*, namun ada sebagian kecil yang langsung sembuh masuk ke dalam kelas *Recovered*,
7. individu yang telah sembuh dari penyakit Hepatitis C, tidak akan tertular lagi dan menjadi kebal terhadap virus Hepatitis C.

Berikut ini didefinisikan variabel dan parameter yang digunakan dalam model penyebaran virus hepatitis C melalui jarum suntik disajikan dalam Tabel 1 berikut

Tabel 1. Variabel dan parameter yang digunakan

Simbol	Definisi	Syarat
$S(t)$	Banyaknya individu <i>susceptible</i>	$S(t) \geq 0$
$A(t)$	Banyaknya individu <i>acute infection</i>	$A(t) \geq 0$
$C(t)$	Banyaknya individu <i>chronic carrier</i>	$C(t) \geq 0$
$R(t)$	Banyaknya individu <i>recovered</i>	$R(t) \geq 0$
$N(t)$	Banyaknya individu dalam populasi	$N(t) \geq 0$
$B$	laju rekrutmen individu yang selanjutnya masuk menjadi individu <i>susceptible</i>	$B > 0$
$\lambda$	Laju infeksi	$0 < \lambda < 1$
$\kappa$	rata-rata laju peminjaman/penggunaan jarum suntik yang tidak steril	$\kappa > 0$
$b_a$	Peluang transmisi akibat adanya kontak antara individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>acute infection</i>	$0 < b_a < 1$
$b_c$	Peluang transmisi akibat adanya kontak antara individu <i>susceptible</i> dengan individu <i>chronic carrier</i>	$0 < b_c < 1$
$\mu$	laju kematian alami	$0 < \mu < 1$
$\sigma_1$	tingkat perpindahan individu <i>acute infection</i> menjadi individu <i>chronic carrier</i>	$\sigma_1 > 0$
$\sigma_2$	tingkat perpindahan individu <i>chronic carrier</i> menjadi individu <i>recovered</i>	$\sigma_2 > 0$
$\rho$	proporsi <i>acute infection</i> yang menjadi <i>chronic carrier</i>	$0 < \rho < 1$
$(1-\rho)$	proporsi <i>acute infection</i> yang sembuh total (masuk kompartemen <i>recovered</i> )	$0 < \rho < 1$

Berdasarkan karakteristik penyebaran penyakit dan masalah yang diasumsikan, dapat dibentuk skema penyebaran hepatitis C pada pengguna narkoba suntik seperti berikut:



Gambar 3. Diagram alir penyebaran hepatitis C pada pengguna narkoba suntik

Berdasarkan diagram alir pada gambar 3 dapat dideskripsikan hal-hal yang mempengaruhi proses penyebaran penyakit Hepatitis C terutama pada pengguna narkoba suntik:

a. Perubahan banyaknya individu *susceptible* terhadap waktu

Pertambahan banyaknya individu kelas *susceptible* dipengaruhi oleh adanya *recruitment* atau bertambahnya pengguna narkoba suntik per satuan waktu ( $B$ ). Sementara itu, pengurangan banyaknya individu dipengaruhi oleh kematian alami dari individu *susceptible* per satuan waktu ( $\mu S$ ) dan banyaknya individu *susceptible* yang terinfeksi Hepatitis C per satuan waktu ( $\lambda S$ ). Oleh karena itu diperoleh persamaan diferensial berikut

$$\frac{dS(t)}{dt} = B - \lambda S(t) - \mu S(t). \quad (3.1)$$



Laju infeksi per satuan waktu dipengaruhi oleh laju kontak yang berupa penggunaan/peminjaman alat suntik secara bersama-sama dengan frekuensi rata-rata tertentu ( $\kappa$ ), oleh individu *susceptible* dengan individu *acute infection* ( $b_a \frac{A(t)}{N(t)}$ ) dan atau individu *chronic carrier* ( $b_c \frac{C(t)}{N(t)}$ ). Secara matematis dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\lambda(t) = \kappa \left( b_a \frac{A(t)}{N(t)} + b_c \frac{C(t)}{N(t)} \right).$$

b. Perubahan banyaknya individu *Acute infection* terhadap waktu

Individu *susceptible* yang mulai terinfeksi virus hepatitis C per satuan waktu ( $\lambda S$ ) mempengaruhi pertambahan populasi *acute infection*. Banyaknya individu yang mati alami per satuan waktu ( $\mu A$ ) dan banyaknya individu yang berubah menjadi individu *chronic infection* per satuan waktu ( $\sigma_1 A$ ) mempengaruhi pengurangan populasi *acute infection*. Sehingga diperoleh persamaan diferensial berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dA(t)}{dt} &= \lambda S(t) - \rho \sigma_1 A(t) - (1 - \rho) \sigma_1 A(t) - \mu A(t) \\ &= \lambda S(t) - \sigma_1 A(t) - \mu A(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

c. Perubahan banyaknya individu *chronic carrier* terhadap waktu

Selanjutnya, individu yang terinfeksi akut (*acute infection*) virus hepatitis C cukup lama akan berkembang menjadi kronis (*chronic carrier*), laju perkembangan per satuan waktu ( $\rho \sigma_1 A$ ) ini akan mempengaruhi bertambahnya populasi *chronic carrier*. Populasi *chronic carrier* berkurang karena adanya kematian alami individu *chronic carrier* per satuan waktu ( $\mu C$ )

dan adanya individu *chronic carrier* yang bebas dari virus Hepatitis C per satuan waktu ( $\sigma_2 C$ ). Didapat persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dC(t)}{dt} = \rho\sigma_1 A(t) - \sigma_2 C(t) - \mu C(t). \quad (3.3)$$

d. Perubahan banyaknya individu *recovered* terhadap waktu

Individu *acute infection* yang telah sembuh total  $((1-\rho)\sigma_1 A)$  dan individu *chronic carrier* yang bebas dari virus hepatitis C ( $\sigma_2 C$ ) akan masuk sebagai populasi *recovered* akan menambah populasi *recovered*. Sementara, individu *recovered* yang mati secara alami akan mengurangi populasi *recovered*. Diperoleh persamaan diferensial berikut

$$\frac{dR(t)}{dt} = (1 - \rho)\sigma_1 A(t) + \sigma_2 C(t) - \mu R(t). \quad (3.4)$$

Berdasarkan deskripsi di atas dan dari persamaan (3.1) – (3.4) maka penyebaran penyakit Hepatitis C pada pengguna narkoba suntik dapat dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial nonlinear orde satu seperti berikut: (Kretzschmar,2006)

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= B - \lambda S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \lambda S(t) - \sigma_1 A(t) - \mu A(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \rho\sigma_1 A(t) - \sigma_2 C(t) - \mu C(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (1 - \rho)\sigma_1 A(t) + \sigma_2 C(t) - \mu R(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

dengan laju infeksi per satuan waktu adalah

$$\lambda(t) = \kappa \left( b_a \frac{A(t)}{N(t)} + b_c \frac{C(t)}{N(t)} \right).$$

Berdasarkan asumsi pertama, jumlah populasi total konstan/tetap, sehingga

$$N(t) = S(t) + A(t) + C(t) + R(t) \quad (3.6)$$

Selanjutnya dengan mendiferensialkan persamaan (3.6), diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N(t) &= \frac{d}{dt}(S(t) + A(t) + C(t) + R(t)) \\ 0 &= \frac{d}{dt}S(t) + \frac{d}{dt}A(t) + \frac{d}{dt}C(t) + \frac{d}{dt}R(t) \\ &= B - \lambda S(t) - \mu S(t) + \lambda S(t) - \sigma_1 A(t) - \mu A(t) + \rho \sigma_1 A(t) - \sigma_2 A(t) \\ &\quad - \mu A(t) + (1 - \rho) \sigma_1 a(t) + \sigma_2 c(t) - \mu r(t) \\ &= B - \mu(S(t) + A(t) + C(t) + R(t)) \\ &= B - \mu N(t) \\ \mu N(t) &= B \\ N(t) &= \frac{B}{\mu} \quad \text{atau ekuivalen dengan} \quad \mu = \frac{B}{N(t)}. \end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan sistem (3.5), dapat digunakan penskalaan, yaitu membentuk sistem (3.5) menjadi bentuk proporsi antara banyaknya individu dalam suatu subpopulasi dengan banyaknya populasi total. Kemudian untuk menyederhanakan notasi, dimisalkan

$$s = \frac{S(t)}{N(t)}, \quad a = \frac{A(t)}{N(t)}, \quad c = \frac{C(t)}{N(t)}, \quad r = \frac{R(t)}{N(t)}$$

sehingga sistem (3.5) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= \mu - \lambda(t)s(t) - \mu s(t) \\
\frac{da}{dt} &= \lambda(t)s(t) - \sigma_1 a(t) - \mu a(t) \\
\frac{dc}{dt} &= \rho \sigma_1 a(t) - \sigma_2 c(t) - \mu c(t) \\
\frac{dr}{dt} &= (1 - \rho)\sigma_1 a(t) + \sigma_2 c(t) - \mu r(t)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

dengan  $\lambda(t) = \kappa(b_a a(t) + b_c c(t))$ , dan  $s(t) + a(t) + c(t) + r(t) = 1$ .

### 3.2. Titik Ekuilibrium

Titik  $(s, a, c, r)$  merupakan titik-titik ekuilibrium dari Sistem (3.7) jika memenuhi persamaan  $\frac{ds}{dt} = \frac{da}{dt} = \frac{dc}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$ . Titik-titik ekuilibrium dari sistem (3.7) disajikan dalam teorema berikut:

#### Teorema 3.2.1.

(i) Jika  $a = 0$ , maka sistem (3.7) memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu

$$E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0).$$

(ii) Jika  $a \neq 0$  maka sistem (3.7) memiliki titik ekuilibrium endemik  $E_1 =$

$(\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r})$  dengan

$$\begin{aligned}
\hat{s} &= \frac{(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} \\
\hat{a} &= \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} \\
\hat{c} &= \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}
\end{aligned}$$

$$\hat{r} = \frac{(\sigma_2 + (1 - \rho)\mu)\sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}.$$

Bukti

Sistem (3.7) akan mencapai titik ekuilibrium jika  $\frac{ds(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt} = \frac{dc(t)}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} = 0$ , maka Sistem (3.7) dapat ditulis:

$$\frac{B}{N} - \lambda s - \mu s = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - \lambda s - \mu s = 0 \quad (3.8)$$

$$\lambda s - \sigma_1 a - \mu a = 0 \quad (3.9)$$

$$\rho \sigma_1 a - \sigma_2 c - \mu c = 0 \quad (3.10)$$

$$(1 - \rho) \sigma_1 a + \sigma_2 c - \mu r = 0 \quad (3.11)$$

dengan  $\lambda(t) = \kappa(b_a a + b_c c)$ .

(i) Jika  $a = 0$ , maka dari persamaan (3.10) diperoleh

$$\rho \sigma_1 a - (\sigma_2 + \mu) c = 0$$

$$\Leftrightarrow -(\sigma_2 + \mu) c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = 0. \quad (3.12)$$

Berdasarkan persamaan (3.12) diperoleh  $c = 0$ . Jika  $a = 0$  dan  $c = 0$ , maka dari persamaan (3.8) diperoleh

$$\mu - (\lambda + \mu) s = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - (\kappa(b_a a + b_c c) + \mu) s = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu - \mu s = 0$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{\mu}{\mu} = 1, \quad (3.13)$$

dan dari persamaan (3.11) diperoleh :

$$\begin{aligned}
(1 - \rho)\sigma_1 a + \sigma_2 c - \mu r &= 0 \\
\Leftrightarrow -\mu r &= 0 \\
\Leftrightarrow r &= 0.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Oleh karena itu diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$ . Jadi terbukti bahwa jika  $a = 0$ , maka sistem (3.7) memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$ .

(ii) Selanjutnya, jika  $a \neq 0$  (disimbolkan dengan  $\hat{a}$ ), maka dari persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned}
\rho\sigma_1 \hat{a} - \sigma_2 \hat{c} - \mu \hat{c} &= 0 \\
\Leftrightarrow \rho\sigma_1 \hat{a} &= (\sigma_2 + \mu) \hat{c} \\
\Leftrightarrow \hat{c} &= \frac{\rho\sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Berdasarkan persamaan (3.15) diperoleh  $\hat{c} = \frac{\rho\sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}$ . Jika  $a \neq 0$  dan

$\hat{c} = \frac{\rho\sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}$ , maka dari persamaan (3.9) diperoleh

$$\begin{aligned}
\lambda \hat{s} - \sigma_1 \hat{a} - \mu \hat{a} &= 0 \\
\Leftrightarrow \kappa(b_a \hat{a} + b_c \hat{c}) \hat{s} - (\sigma_1 - \mu) \hat{a} &= 0 \\
\Leftrightarrow \kappa \left( b_a \hat{a} + b_c \frac{\rho\sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a} \right) \hat{s} - (\sigma_1 - \mu) \hat{a} &= 0 \\
\Leftrightarrow \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho\sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{s} - (\sigma_1 - \mu) \right) \hat{a} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Karena  $a \neq 0$ , maka persamaan (3.16) menjadi

$$\begin{aligned}
& \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{s} - (\sigma_1 - \mu) = 0 \\
& \Leftrightarrow \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{s} = (\sigma_1 - \mu) \\
& \Leftrightarrow \hat{s} = \frac{(\sigma_1 - \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)}, \tag{3.17}
\end{aligned}$$

dan dari persamaan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned}
& (1 - \rho)\sigma_1 \hat{a} + \sigma_2 \hat{c} - \mu \hat{r} = 0 \\
& \Leftrightarrow (1 - \rho)\sigma_1 \hat{a} + \sigma_2 \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a} - \mu \hat{r} = 0 \\
& \Leftrightarrow \left( (1 - \rho)\sigma_1 + \sigma_2 \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a} = \mu \hat{r} \\
& \Leftrightarrow \left( \frac{(1 - \rho)\sigma_1(\sigma_2 + \mu) + \sigma_2 \rho \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a} = \hat{r} \\
& \Leftrightarrow \left( \frac{(1 - \rho)\sigma_1 \sigma_2 + (1 - \rho)\sigma_1 \mu + \sigma_2 \rho \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a} = \hat{r} \\
& \Leftrightarrow \left( \frac{(1 - \rho)\sigma_1 \sigma_2 + (1 - \rho)\sigma_1 \mu + \sigma_2 \rho \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a} = \hat{r} \\
& \Leftrightarrow \left( \frac{(1 - \rho)\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \mu}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a} = \hat{r} \\
& \Leftrightarrow \left( \frac{(1 - \rho)\sigma_2 + \mu}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \right) \sigma_1 \hat{a} = \hat{r}
\end{aligned}$$

$$\text{diperoleh } \hat{r} = \left( \frac{(1 - \rho)\sigma_2 + \mu}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \right) \sigma_1 \hat{a}. \tag{3.18}$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik  $E_1 = (\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r})$  dengan  $\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r}$  seperti pada persamaan (3.15), (3.6), (3.17) dan (3.18). Jadi terbukti bahwa Jika  $a \neq 0$  maka sistem (3.7) memiliki titik ekuilibrium endemik  $E_1 = (\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r})$  dengan

$$\begin{aligned}\hat{s} &= \frac{(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} \\ \hat{a} &= \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} \\ \hat{c} &= \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a} \\ \hat{r} &= \frac{(\sigma_2 + (1 - \rho)\mu) \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}.\end{aligned}$$

### 3.3. Bilangan Reproduksi Dasar ( $R_0$ )

Bilangan reproduksi dasar merupakan harga harapan dari suatu kasus baru (sekunder) yang disebabkan oleh individu yang terinfeksi (kasus primer) dalam suatu populasi individu rentan. Jika  $R_0 < 1$  penyakit tidak menyerang populasi, namun jika  $R_0 > 1$  maka penyakit sangat mungkin untuk menyebar.

Penentuan bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) digunakan metode *next generation matrix* dari Sistem (3.7). Pada model ini, kelas terinfeksi adalah *acute infection* ( $a$ ) dan *chronic carrier* ( $c$ ), sehingga persamaan diferensial yang digunakan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \lambda s - \sigma_1 a - \mu a \\ \frac{dc}{dt} &= \rho \sigma_1 a - \sigma_2 c - \mu c\end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\varphi = \begin{bmatrix} \lambda s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa(b_a a + b_c c) s \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \psi = \begin{bmatrix} \sigma_1 a + \mu a \\ -\rho \sigma_1 a + \sigma_2 c + \mu c \end{bmatrix}.$$



Kemudian  $\varphi$  dan  $\psi$  dilinierisasi. Hasil masing-masing linierisasinya adalah

$$F = \begin{bmatrix} \kappa b_a s & \kappa b_c s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} \sigma_1 + \mu & 0 \\ -\rho \sigma_1 & \sigma_2 + \mu \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari  $V^{-1}$

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \frac{1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \begin{bmatrix} \sigma_2 + \mu & 0 \\ \rho \sigma_1 & \sigma_1 + \mu \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_2 + \mu}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} & 0 \\ \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} & \frac{\sigma_1 + \mu}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(\sigma_1 + \mu)} & 0 \\ \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} & \frac{1}{(\sigma_2 + \mu)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Diperoleh *next generation matrix* berikut

$$\begin{aligned} K = FV^{-1} &= \begin{bmatrix} \kappa b_a s & \kappa b_c s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\sigma_1 + \mu)} & 0 \\ \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} & \frac{1}{(\sigma_2 + \mu)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\kappa b_a s}{(\sigma_1 + \mu)} + \frac{\kappa b_c s \rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} & \frac{\kappa b_c s}{(\sigma_2 + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pada awal kemunculan virus dalam populasi, hampir semua individu rentan terhadap penyakit, sehingga nilai  $s$  pada persamaan (3.19) dapat didekati menggunakan titik ekuilibrium  $s$  saat bebas penyakit. Dengan mensubstitusi persamaan (3.13) ke dalam persamaan (3.19), diperoleh

$$K = FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa b_a}{(\sigma_1 + \mu)} + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} & \frac{\kappa b_c}{(\sigma_2 + \mu)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Menurut Diekmann dan Heesterbeek (2000), bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai spektral radius dari *next generation matrix*, maka diperoleh bilangan reproduksi dasar dari Sistem (3.7) yaitu

$$\begin{aligned} R_0 = \rho(K) &= \frac{\kappa b_a}{(\sigma_1 + \mu)} + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \\ &= \kappa \left( \frac{b_a}{(\sigma_1 + \mu)} + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.4. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Pada bagian ini akan dilakukan analisa kestabilan titik ekuilibrium Sistem (3.7). Kestabilan titik ekuilibrium dari sistem (3.7) disajikan dalam teorema berikut:

#### **Teorema 3.4.2.**

- (i) Jika  $R_0 < 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  stabil asimtotik lokal.
- (ii) Jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  tidak stabil.

**Bukti**

Sistem (3.7) didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} f_1(s, a, c, r) &= \mu - \lambda s - \mu s \\ f_2(s, a, c, r) &= \lambda s - \sigma_1 a - \mu a \\ f_3(s, a, c, r) &= \rho \sigma_1 a - \sigma_2 c - \mu c \\ f_4(s, a, c, r) &= (1 - \rho) \sigma_1 a + \sigma_2 c - \mu r \end{aligned}$$

dengan  $\lambda(t) = \kappa(b_a a + b_c c)$ .

Maka matriks jacobian dari sistem di atas adalah :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(s, a, c, r)}{\partial s} & \frac{\partial f_1(s, a, c, r)}{\partial a} & \frac{\partial f_1(s, a, c, r)}{\partial c} & \frac{\partial f_1(s, a, c, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_2(s, a, c, r)}{\partial s} & \frac{\partial f_2(s, a, c, r)}{\partial a} & \frac{\partial f_2(s, a, c, r)}{\partial c} & \frac{\partial f_2(s, a, c, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_3(s, a, c, r)}{\partial s} & \frac{\partial f_3(s, a, c, r)}{\partial a} & \frac{\partial f_3(s, a, c, r)}{\partial c} & \frac{\partial f_3(s, a, c, r)}{\partial r} \\ \frac{\partial f_4(s, a, c, r)}{\partial s} & \frac{\partial f_4(s, a, c, r)}{\partial a} & \frac{\partial f_4(s, a, c, r)}{\partial c} & \frac{\partial f_4(s, a, c, r)}{\partial r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\kappa(b_a a + b_c c) - \mu & -\kappa b_a s & -\kappa b_c s & 0 \\ \kappa(b_a a + b_c c) & \kappa b_a s - \sigma_1 - \mu & \kappa b_c s & 0 \\ 0 & \rho \sigma_1 & -\sigma_2 - \mu & 0 \\ 0 & (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Akan ditunjukkan bahwa jika  $R_0 < 1$ , titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  stabil asimtotik lokal.

Substitusi titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  ke persamaan (3.21), maka diperoleh matriks Jacobian disekitar titik ekuilibrium  $E_0$

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu & -\kappa b_a & -\kappa b_c & 0 \\ 0 & \kappa b_a - \sigma_1 - \mu & \kappa b_c & 0 \\ 0 & \rho \sigma_1 & -\sigma_2 - \mu & 0 \\ 0 & (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E_0)$ , dapat dicari dengan menentukan  $\det(J(E_0) - \gamma I) = 0$ , dengan  $\gamma$  adalah nilai eigen dan  $I$  adalah matriks identitas. Sehingga diperoleh:

$$\det(J(E_0) - \gamma I) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\mu - \gamma & -\kappa b_a & -\kappa b_c & 0 \\ 0 & \kappa b_a - \sigma_1 - \mu - \gamma & \kappa b_c & 0 \\ 0 & \rho \sigma_1 & -\sigma_2 - \mu - \gamma & 0 \\ 0 & (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu - \gamma \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -(\mu + \gamma) \begin{vmatrix} \kappa b_a - \sigma_1 - \mu - \gamma & \kappa b_c & 0 \\ \rho \sigma_1 & -\sigma_2 - \mu - \gamma & 0 \\ (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu - \gamma \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow -(\mu + \gamma) ((\kappa b_a - \sigma_1 - \mu - \gamma)(-\sigma_2 - \mu - \gamma)(-\mu - \gamma) - \rho \sigma_1 \kappa b_c (-\mu - \gamma)) \\
&\quad = 0 \\
&\Leftrightarrow -(\mu + \gamma)(-\mu - \gamma) ((\kappa b_a - \sigma_1 - \mu - \gamma)(-\sigma_2 - \mu - \gamma) - \rho \sigma_1 \kappa b_c) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\gamma + \mu)^2 \left( \gamma^2 + (-\kappa b_a + (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_1 + \mu))\gamma - \rho \sigma_1 \kappa b_c - \kappa b_a (\sigma_2 + \mu) \right. \\
&\quad \left. + (\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu) \right) = 0. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.26) dapat ditulis menjadi

$$(\gamma + \mu)^2 (\gamma^2 + q_1 \gamma + q_2) = 0 \tag{3.27}$$

dengan

$$\begin{aligned}
q_1 &= -\kappa b_a + (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_1 + \mu) \\
q_2 &= -\rho \sigma_1 \kappa b_c - \kappa b_a (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu).
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.26), diperoleh nilai eigen yaitu  $\gamma_1$  dan  $\gamma_2$  dengan  $\gamma_1 = \gamma_2 = -\mu$ . Karena  $\mu$  bernilai positif, maka bagian real dari kedua nilai eigen tersebut adalah negatif. Sementara untuk nilai eigen yang lainnya, akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk melihat tipe kestabilan dari persamaan karakteristik

$$\gamma^2 + q_1 \gamma + q_2 = 0. \tag{3.28}$$

Persamaan  $q_1 = -\kappa b_a + (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_1 + \mu)$  dapat dinyatakan menjadi

$$\begin{aligned}
q_1 &= - \left( \frac{R_0(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1} \right) b_a + (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_1 + \mu) \\
&= \frac{-R_0(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)b_a + (\sigma_2 + \mu)(b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1} \\
&\quad + \frac{(\sigma_1 + \mu)(b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1} \\
&= \frac{-R_0(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)b_a + (\sigma_2 + \mu)(b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1} \\
&\quad + \frac{(\sigma_1 + \mu)b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1(\sigma_1 + \mu)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1} \\
&= \frac{b_a(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)(1-R_0) + (\sigma_2 + \mu)(b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1} \\
&\quad + \frac{b_c\rho\sigma_1(\sigma_1 + \mu)}{b_a(\sigma_2 + \mu) + b_c\rho\sigma_1}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya persamaan  $q_2 = -\rho\sigma_1\kappa b_c - \kappa b_a(\sigma_2 + \mu) + (\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)$  dapat dinyatakan menjadi:

$$\begin{aligned}
q_2 &= (-\rho\sigma_1\kappa b_c - \kappa b_a(\sigma_2 + \mu) + (\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)) \left( \frac{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)}{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)} \right) \\
&= \left( \frac{-\rho\sigma_1\kappa b_c - \kappa b_a(\sigma_2 + \mu)}{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)} + \frac{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)}{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)} \right) (\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu) \\
&= \left( - \left( \frac{\rho\sigma_1\kappa b_c}{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)} + \frac{\kappa b_a}{(\sigma_1 + \mu)} \right) + 1 \right) (\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu) \\
&= (-R_0 + 1)(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)
\end{aligned}$$

dengan  $R_0 = \kappa \left( \frac{b_a}{\sigma_1 + \mu} + \frac{b_c\rho\sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \right)$ .

Apabila diketahui  $R_0 < 1$ , diperoleh  $q_1 > 0$  dan  $q_2 > 0$ . Berdasarkan kriteria Routh Hurwitz, pembuat nol dari persamaan (3.28) akan bernilai negatif

jika  $q_1 > 0$  dan  $q_2 > 0$ . Hal ini menunjukkan bahwa semua nilai eigen dari persamaan (3.26) bernilai negatif, sehingga titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  stabil asimtotik lokal.

Sementara itu, jika diketahui  $R_0 > 1$ , maka diperoleh  $q_2 < 0$ . Akar-akar persamaan (3.28) akan beda tanda yaitu  $\gamma_1 < 0$  dan  $\gamma_2 > 0$  atau sebaliknya. Sehingga, dapat dikatakan bahwa jika  $R_0 > 1$ , maka persamaan (3.28) memiliki satu nilai eigen yang bernilai positif. Oleh karena itu, titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  tidak stabil.

### **Teorema 3.4.3**

*Jika  $R_0 \leq 1$  maka titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (s, a, c, r) = (1, 0, 0, 0)$  stabil asimtotik global.*

**Bukti**

Untuk menunjukkan kestabilan global dari titik ekuilibrium bebas penyakit, maka akan ditunjukkan bahwa  $s(t) \rightarrow 1$ ,  $a(t) \rightarrow 0$ ,  $c(t) \rightarrow 0$ ,  $r(t) \rightarrow 0$  saat  $t \rightarrow \infty$ .

Hal pertama yang dilakukan adalah menentukan solusi untuk persamaan diferensial pada sistem (3.7) yaitu

$$\frac{ds}{dt} = \mu - \lambda(t)s(t) - \mu s(t) \quad (3.29)$$

$$\frac{da}{dt} = \lambda(t)s(t) - \sigma_1 a(t) - \mu a(t) \quad (3.30)$$

$$\frac{dc}{dt} = \rho\sigma_1 a(t) - \sigma_2 c(t) - \mu c(t) \quad (3.31)$$

$$\frac{dr}{dt} = (1 - \rho)\sigma_1 a(t) + \sigma_2 c(t) - \mu r(t) \quad (3.32)$$

$$\text{dengan } \lambda(t) = \kappa(b_a a(t) + b_c c(t)) \quad (3.33)$$

Akan ditentukan solusi untuk persamaan (3.30). Karena  $0 \leq s(t) \leq 1$ , persamaan diferensial (3.30) dapat ditulis sebagai

$$\frac{da}{dt} \leq \lambda(t)s(t) - \sigma_1 a(t) - \mu a(t)$$

atau

$$\frac{da}{dt} + (\sigma_1 + \mu)a(t) \leq \lambda(t) \quad (3.34)$$

diperoleh faktor integrasinya adalah

$$\exp\left(\int (\sigma_1 + \mu) dt\right) = \exp((\sigma_1 + \mu)t) \quad (3.35)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (3.34) dengan persamaan (3.35), diperoleh

$$\begin{aligned} e^{(\sigma_1 + \mu)t} \frac{da}{dt} + e^{(\sigma_1 + \mu)t} (\sigma_1 + \mu)a(t) &\leq e^{(\sigma_1 + \mu)t} \lambda(t) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( e^{(\sigma_1 + \mu)t} a(t) \right) &\leq e^{(\sigma_1 + \mu)t} \lambda(t) \\ \Leftrightarrow e^{(\sigma_1 + \mu)t} a(t) &\leq \int e^{(\sigma_1 + \mu)t} \lambda(t) dt + a_0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan (3.30) adalah

$$a(t) \leq e^{-(\sigma_1 + \mu)t} \left[ \int e^{(\sigma_1 + \mu)t} \lambda(t) dt + a_0 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-(\sigma_1+\mu)t} \int e^{(\sigma_1+\mu)t} \lambda(t) dt + a_0 e^{-(\sigma_1+\mu)t} \\
&= \int_0^t e^{-(\sigma_1+\mu)(t-\tau)} \lambda(\tau) d\tau + a_0 e^{-(\sigma_1+\mu)t}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

dengan  $a_0$  adalah suatu konstanta.

Selanjutnya, akan ditentukan nilai limitnya dengan mengambil  $\limsup$  untuk  $t \rightarrow \infty$  pada persamaan (3.36), diperoleh

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t e^{-(\sigma_1+\mu)\tau} \lambda(t-\tau) d\tau + a_0 e^{-(\sigma_1+\mu)t} \right) \\
&\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(\sigma_1+\mu)\tau} \lambda(t-\tau) d\tau
\end{aligned}$$

Dalam hal ini, dibentuk suatu barisan fungsi  $\lambda_n(t)$  dan  $a_n(t)$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dimana  $\lambda_n(t) \rightarrow \lambda(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t) = \lambda(t)$  dan  $a_n(t) \rightarrow a(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) = a(t)$ . Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(\sigma_1+\mu)\tau} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t-\tau) d\tau \\
\Leftrightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) &\leq \int_0^t e^{-(\sigma_1+\mu)\tau} \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t-\tau) \right) d\tau \\
&= \int_0^t e^{-(\sigma_1+\mu)\tau} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t-\tau) d\tau \\
&\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \int_0^\infty e^{-(\sigma_1+\mu)\tau} d\tau \\
&= \frac{1}{-(\sigma_1 + \mu)} [e^{-(\sigma_1+\mu)\tau}]_0^\infty \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda \\
&= \frac{1}{-(\sigma_1 + \mu)} (-1) \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda \\
&= \frac{1}{(\sigma_1 + \mu)} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda
\end{aligned} \tag{3.37}$$



Akan ditentukan pula solusi untuk persamaan (3.31). Persamaan diferensial linier (3.31) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dc}{dt} + (\sigma_2 + \mu)c = \rho\sigma_1 a \quad (3.38)$$

diperoleh faktor integrasinya adalah

$$\exp\left(\int (\sigma_2 + \mu) dt\right) = \exp((\sigma_2 + \mu)t). \quad (3.39)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (3.38) dengan persamaan (3.39), maka

$$\begin{aligned} e^{(\sigma_2 + \mu)t} \frac{dc}{dt} + e^{(\sigma_2 + \mu)t} (\sigma_2 + \mu)c &= e^{(\sigma_2 + \mu)t} \rho\sigma_1 a \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (e^{(\sigma_2 + \mu)t} c) &= e^{(\sigma_2 + \mu)t} \rho\sigma_1 a \\ \Leftrightarrow e^{(\sigma_2 + \mu)t} c &= \rho\sigma_1 \int e^{(\sigma_2 + \mu)t} a dt + c_0. \end{aligned}$$

Diperoleh solusi dari persamaan (3.31) adalah

$$\begin{aligned} c(t) &= \rho\sigma_1 e^{-(\sigma_2 + \mu)t} \int e^{(\sigma_2 + \mu)t} a dt + c_0 e^{-(\sigma_2 + \mu)t} \\ &= \rho\sigma_1 \int_0^t e^{-(\sigma_2 + \mu)(t-\theta)} a d\theta + c_0 e^{-(\sigma_2 + \mu)t} \\ &= \rho\sigma_1 \int_0^t e^{-(\sigma_2 + \mu)\theta} a(t-\theta) d\theta + c_0 e^{-(\sigma_2 + \mu)t} \end{aligned} \quad (3.40)$$

dengan  $c_0$  adalah suatu bilangan konstan.

Selanjutnya, akan ditentukan nilai limit dari persamaan (3.40) dengan mengambil limit superior untuk  $t \rightarrow \infty$ , diperoleh

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \rho \sigma_1 \int_0^t e^{-(\sigma_2 + \mu)\theta} a(t - \theta) d\theta + c_0 e^{-(\sigma_2 + \mu)t} \right) \\ &\leq \rho \sigma_1 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(\sigma_2 + \mu)\theta} a(t - \theta) d\theta\end{aligned}$$

Dalam hal ini dibentuk suatu barisan fungsi  $c_n(t)$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dimana  $c_n(t) \rightarrow c(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) = c(t)$ , diperoleh

$$\begin{aligned}\limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) &\leq \rho \sigma_1 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-(\sigma_2 + \mu)\theta} a(t - \theta) d\theta \\ \Leftrightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) &\leq \rho \sigma_1 \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \int_0^\infty e^{-(\sigma_2 + \mu)\theta} d\theta \\ &= \frac{\rho \sigma_1}{-(\sigma_2 + \mu)} \left[ e^{-(\sigma_2 + \mu)\theta} \right]_0^\infty \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \\ &= \frac{\rho \sigma_1}{-(\sigma_2 + \mu)} (-1) \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \\ &= \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t).\end{aligned}\tag{3.41}$$

Selanjutnya mensubstitusi pertidaksamaan (3.37) ke pertidaksamaan (3.41) diperoleh

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) \leq \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t).\tag{3.44}$$

Kemudian akan dibahas mengenai laju infeksi penyebaran virus hepatitis C. Berdasarkan persamaan (3.33) diperoleh  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda < \infty$ . Akan ditunjukkan bahwa  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$ , dengan mengambil  $\limsup$  untuk  $t \rightarrow \infty$  pada persamaan (3.33).

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \kappa(b_a a(t) + b_c c(t)) \right)$$

Sesuai paparan sebelumnya, dibentuk suatu barisan fungsi  $\lambda_n(t) \rightarrow \lambda(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t) = \lambda(t)$ ,  $a_n(t) \rightarrow a(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) = a(t)$  dan  $c_n(t) \rightarrow c(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) = c(t)$ , maka

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(t) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( \kappa \left( b_a \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) + b_c \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) \right) \right) \\ \Leftrightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) &= \kappa b_a \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) + \kappa b_c \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) \\ &= \kappa b_a \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) + \kappa b_c \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Substitusi pertidaksamaan (3.37) dan (3.41) ke persamaan (3.45) diperoleh

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda &\leq \kappa b_a \frac{1}{(\sigma_1 + \mu)} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) + \kappa b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \\ &= \left( \frac{\kappa b_a}{(\sigma_1 + \mu)} + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \right) \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda \\ &= R_0 \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda &\leq R_0 \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda - R_0 \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda &\leq 0 \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda (1 - R_0) &\leq 0. \end{aligned}$$

Karena diketahui  $R_0 \leq 1$ , maka diperoleh  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \lambda = 0$ .

Selanjutnya dengan  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \lambda = 0$ , maka berdasarkan pertidaksamaan (3.37) dan (3.44) diperoleh  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup a(t) = 0$  dan  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup c(t) = 0$ .

Akan ditentukan solusi untuk persamaan (3.32). Persamaan diferensial linier (3.32) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dr}{dt} + \mu r(t) = (1 - \rho)\sigma_1 a(t) + \sigma_2 c(t) \quad (3.46)$$

diperoleh faktor integrasinya adalah

$$\exp\left(\int \mu dt\right) = \exp(\mu t). \quad (3.47)$$

Kemudian dengan mengalikan persamaan (3.46) dengan persamaan (3.47), maka

$$\begin{aligned} e^{\mu t} \frac{dr}{dt} + e^{\mu t} \mu r(t) &= e^{\mu t} ((1 - \rho)\sigma_1 a(t) + \sigma_2 c(t)) \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (e^{\mu t} r(t)) &= e^{\mu t} (1 - \rho)\sigma_1 a(t) + e^{\mu t} \sigma_2 c(t) \\ \Leftrightarrow e^{\mu t} r(t) &= (1 - \rho)\sigma_1 \int e^{\mu t} a(t) dt + \sigma_2 \int e^{\mu t} c(t) dt + r_0 \end{aligned}$$

Solusi dari persamaan (3.32) adalah

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{-\mu t} \left[ (1 - \rho)\sigma_1 \int e^{\mu t} a(t) dt + \sigma_2 \int e^{\mu t} c(t) dt + r_0 \right] \\ &= e^{-\mu t} (1 - \rho)\sigma_1 \int e^{\mu t} a(t) dt + e^{-\mu t} \sigma_2 \int e^{\mu t} c(t) dt + r_0 e^{-\mu t} \\ &= (1 - \rho)\sigma_1 \int_0^t e^{-\mu(t-\omega)} a(\omega) d\omega + \sigma_2 \int_0^t e^{-\mu(t-\omega)} c(\omega) d\omega + r_0 e^{-\mu t} \\ &= (1 - \rho)\sigma_1 \int_0^t e^{-\mu\omega} a(t - \omega) d\omega + \sigma_2 \int_0^t e^{-\mu\omega} c(t - \omega) d\omega + r_0 e^{-\mu t} \quad (3.48) \end{aligned}$$

dengan  $r_0$  adalah suatu bilangan konstan.

Selanjutnya, akan ditentukan nilai limit dari persamaan (3.48) dengan mengambil

limit superior untuk  $t \rightarrow \infty$ , diperoleh

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} r(t) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \left( (1 - \rho)\sigma_1 \int_0^t e^{-\mu\omega} a(t - \omega) d\omega + \sigma_2 \int_0^t e^{-\mu\omega} c(t - \omega) d\omega \right. \\ &\quad \left. + r_0 e^{-\mu t} \right) \\ &\leq (1 - \rho)\sigma_1 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\mu\omega} a(t - \omega) d\omega + \sigma_2 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\mu\omega} c(t - \omega) d\omega \end{aligned}$$

Telah dibentuk suatu barisan fungsi  $c_n(t)$  dan  $a_n(t)$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  dimana

$c_n(t) \rightarrow c(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t) = c(t)$  dan  $a_n(t) \rightarrow a(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t) = a(t)$ ,

selanjutnya dibentuk pula barisan fungsi sehingga  $r_n(t)$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$

dimana  $r_n(t) \rightarrow r(t)$  atau  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(t) = r(t)$ , sehingga

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(t) &\leq (1 - \rho)\sigma_1 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\mu\omega} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t - \omega) d\omega \\ &\quad + \sigma_2 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\mu\omega} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t - \omega) d\omega \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} r(t) &= (1 - \rho)\sigma_1 \int_0^t e^{-\mu\omega} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n(t - \omega) d\omega \\ &\quad + \sigma_2 \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-\mu\omega} \limsup_{t \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(t - \omega) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \rho)\sigma_1 \int_0^t e^{-\mu\omega} \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t - \omega) d\omega \\
&\quad + \sigma_2 \int_0^t e^{-\mu\omega} \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t - \omega) d\omega \\
&\leq (1 - \rho)\sigma_1 \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \int_0^\infty e^{-\mu\omega} d\omega \\
&\quad + \sigma_2 \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) \int_0^\infty e^{-\mu\omega} d\omega \\
&= \frac{(1 - \rho)\sigma_1}{-\mu} [e^{-\mu\omega}]_0^\infty \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) + \frac{\sigma_2}{-\mu} [e^{-\mu\omega}]_0^\infty \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) \\
&= \frac{(1 - \rho)\sigma_1}{\mu} \limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) + \frac{\sigma_2}{\mu} \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) \tag{3.49}
\end{aligned}$$

Karena  $\limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) = \limsup_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ , maka diperoleh dari pertidaksamaan

$$\begin{aligned}
(3.49) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} r(t) &= 0. \text{ Sehingga didapat } \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0 \text{ dan} \\
\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Kemudian berdasarkan persamaan (3.6) diketahui bahwa  $s(t) + a(t) + c(t) + r(t) = 1$ , Dengan mengambil nilai limit  $t \rightarrow \infty$ , maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} (s(t) + a(t) + c(t) + r(t)) &= \lim_{t \rightarrow \infty} 1 \\
\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} c(t) + \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) &= 1 \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Karena  $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ , dan  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ , dan  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$  maka diperoleh

$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 1$ . Sehingga terbukti bahwa untuk  $R_0 \leq 1$  maka titik ekuilibrium

bebas penyakit  $E_0 = (1,0,0,0)$  stabil asimtotik global.

**Teorema 3.4.4.**

Jika  $R_0 > 1$  maka titik ekuilibrium endemik  $E_1 = (\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r})$  stabil asimtotik lokal

dengan

$$\begin{aligned}\hat{s} &= \frac{(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} \\ \hat{a} &= \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} \\ \hat{c} &= \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a} \\ \hat{r} &= \frac{(\sigma_2 + (1 - \rho)\mu) \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}\end{aligned}$$

Bukti

Substitusi titik ekuilibrium dalam kondisi endemik  $E_1 = (\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r}) =$

$$\left( \frac{(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)}, \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)}, \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}, \frac{(\sigma_2 + (1 - \rho)\mu) \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \hat{a} \right)$$

ke persamaan (3.25), diperoleh :

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\kappa(b_a \hat{a} + b_c \hat{c}) - \mu & -\kappa b_a \hat{s} & -\kappa b_c \hat{s} & 0 \\ \kappa(b_a \hat{a} + b_c \hat{c}) & \kappa b_a \hat{s} - \sigma_1 - \mu & \kappa b_c \hat{s} & 0 \\ 0 & \rho \sigma_1 & -\sigma_2 - \mu & 0 \\ 0 & (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Misalkan

$$x = \kappa(b_a \hat{a} + b_c \hat{c}) = \kappa \left( b_a \hat{a} + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a} \right) = \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a};$$

$$y = \kappa b_a \hat{s} = \frac{\kappa b_a (\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)};$$

$$z = \kappa b_c \hat{s} = \frac{\kappa b_c (\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)}$$

$$m = (\sigma_1 + \mu); \quad n = (\sigma_2 + \mu)$$

maka persamaan (3.51) dapat dinyatakan sebagai

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -x - \mu & -y & -z & 0 \\ x & y - m & z & 0 \\ 0 & \rho \sigma_1 & -n & 0 \\ 0 & (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya menentukan  $\det(J(E_1) - \gamma I) = 0$ ,  $\gamma$  adalah nilai eigen dan  $I$  adalah matriks identitas, maka

$$\begin{aligned} & \det(J(E_1) - \gamma I) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{vmatrix} -x - \mu - \gamma & -y & -z & 0 \\ x & y - m - \gamma & z & 0 \\ 0 & \rho \sigma_1 & -n - \gamma & 0 \\ 0 & (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu - \gamma \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (-x - \mu - \gamma) \begin{vmatrix} y - m - \gamma & z & 0 \\ \rho \sigma_1 & -n - \gamma & 0 \\ (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu - \gamma \end{vmatrix} - \\ & x \begin{vmatrix} -y & -z & 0 \\ \rho \sigma_1 & -n - \gamma & 0 \\ (1 - \rho) \sigma_1 & \sigma_2 & -\mu - \gamma \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & (-x - \mu - \gamma) ((y - m - \gamma)(-n - \gamma)(-\mu - \gamma) - \rho \sigma_1 z (-\mu - \gamma)) \\ & - x (-y(-n - \gamma)(-\mu - \gamma) - \rho \sigma_1 (-z)(-\mu - \gamma)) = 0 \\ \Leftrightarrow & (-x - \mu - \gamma) ((y - m - \gamma)(n + \gamma)(\mu + \gamma) + \rho \sigma_1 z (\mu + \gamma)) \\ & + x (y(n + \gamma)(\mu + \gamma) + \rho \sigma_1 z (\mu + \gamma)) = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\mu + \gamma)(-(x + \mu + \gamma)(y - m - \gamma)(n + \gamma) - \rho\sigma_1 z(x + \mu + \gamma) \\
&\quad + xy(n + \gamma) + x\rho\sigma_1 z) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mu + \gamma)(-xyn + xnm + xny - \mu yn + \mu mn + \mu ny - yny + mny \\
&\quad + n\gamma^2 - xy\gamma + xm\gamma + x\gamma^2 - \mu y\gamma + \mu m\gamma + \mu\gamma^2 - y\gamma^2 \\
&\quad + m\gamma^2 + \gamma^3 - \rho\sigma_1 zx - \rho\sigma_1 z\mu - z\rho\sigma_1 \gamma + xyn + xy\gamma \\
&\quad + xz\rho\sigma_1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mu + \gamma)(xnm + xny - \mu yn + \mu mn + \mu ny - yny + mny + n\gamma^2 + xm\gamma \\
&\quad + x\gamma^2 - \mu y\gamma + \mu m\gamma + \mu\gamma^2 - y\gamma^2 + m\gamma^2 + \gamma^3 - \rho\sigma_1 z\mu \\
&\quad - z\rho\sigma_1 \gamma) = 0 \\
&\Leftrightarrow (\mu + \gamma)(\gamma^3 + (n + x + \mu - y + m)\gamma^2 \\
&\quad + (xn + \mu n - yn + mn + xm - \mu x + \mu m - z\rho\sigma_1)\gamma \\
&\quad + (xnm - \mu yn + \mu mn - \rho\sigma_1 z\mu)) = 0 \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.52) dapat ditulis menjadi

$$(\mu + \gamma)(\gamma^3 + k_1\gamma^2 + k_2\gamma + k_3) = 0 \tag{3.53}$$

dengan

$$k_1 = n + x + \mu - y + m$$

$$k_2 = xn + \mu n - yn + mn + xm - \mu y + \mu m - z\rho\sigma_1$$

$$k_3 = xnm - \mu yn + \mu mn - \rho\sigma_1 z\mu$$

Berdasarkan persamaan (3.52), diperoleh nilai eigen yaitu  $\gamma_1 = -\mu$ . Karena  $\mu$  bernilai positif, maka bagian real nilai eigen tersebut adalah negatif.

Untuk nilai eigen yang lainnya, akan digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk melihat akar-akar persamaan akar karakteristiknya. Dengan mensubstitusi

kembali persamaan  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $m$ ,  $n$  ke dalam persamaan  $k_1$ ,  $k_2$ , dan  $k_3$ , maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
k_1 &= n + x + \mu - y + m \\
&= (\sigma_2 + \mu) + \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a} + \mu - \frac{\kappa b_a (\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} + (\sigma_1 + \mu) \\
&= (\sigma_2 + \mu) + R_0 (\sigma_1 + \mu) \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} + \mu - \frac{\kappa b_a}{R_0} \\
&\quad + (\sigma_1 + \mu) \\
&= (\sigma_2 + \mu) + R_0 (\sigma_1 + \mu) \frac{\mu (R_0 - 1)}{(\sigma_1 + \mu) R_0} + \mu - \frac{R_0 ((\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)) - \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \\
&\quad + (\sigma_1 + \mu) \\
&= (\sigma_2 + \mu) + \mu (R_0 - 1) + \mu - (\sigma_1 - \mu) + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} + (\sigma_1 + \mu) \\
&= (\sigma_2 + \mu) + \mu (R_0 - 1) + \mu + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \\
&= (\sigma_2 + \mu) + \mu R_0 + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)}.
\end{aligned}$$

$k_1$  dapat dinyatakan sebagai

$$k_1 = (\sigma_2 + \mu) + \mu R_0 + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)}.$$

Selanjutnya

$$k_2 = xn + \mu n - yn + mn + xm - \mu y + \mu m - z \rho \sigma_1$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a}(\sigma_2 + \mu) + \mu(\sigma_2 + \mu) - \frac{\kappa b_a(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} (\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) + \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a}(\sigma_1 + \mu) \\
&\quad - \mu \frac{\kappa b_a(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} + \mu(\sigma_1 + \mu) - \frac{\kappa b_c(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} \rho \sigma_1 \\
&= \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} (\sigma_2 + \mu) + \mu(\sigma_2 + \mu) \\
&\quad - \frac{\kappa b_a}{R_0} (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} (\sigma_1 + \mu) \\
&\quad - \mu \frac{\kappa b_a}{R_0} + \mu(\sigma_1 + \mu) - \frac{\kappa b_c}{R_0} \rho \sigma_1 \\
&= R_0(\sigma_1 + \mu) \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\sigma_1 + \mu)R_0} (\sigma_2 + \mu) + \mu(\sigma_2 + \mu) \\
&\quad - \frac{R_0((\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)) - \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} (\sigma_2 + \mu) + (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + R_0(\sigma_1 + \mu) \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\sigma_1 + \mu)R_0} (\sigma_1 + \mu) \\
&\quad - \mu \frac{R_0((\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)) - \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} + \mu(\sigma_1 + \mu) - \frac{\kappa b_c}{R_0} \rho \sigma_1 \\
&= \mu(R_0 - 1)(\sigma_2 + \mu) + \mu(\sigma_2 + \mu) - (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0} \\
&\quad + (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) + \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu) - \mu(\sigma_1 + \mu) \\
&\quad + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} + \mu(\sigma_1 + \mu) - \frac{\kappa b_c}{R_0} \rho \sigma_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu R_0(\sigma_2 + \mu) - \mu(\sigma_2 + \mu) + \mu(\sigma_2 + \mu) - (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0} \\
&\quad + (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) + \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu) - \mu(\sigma_1 + \mu) \\
&\quad + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} + \mu(\sigma_1 + \mu) - \frac{\kappa b_c}{R_0} \rho \sigma_1 \\
&= \mu R_0(\sigma_2 + \mu) + \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu) + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)}.
\end{aligned}$$

$k_2$  dapat dinyatakan sebagai

$$k_2 = \mu R_0(\sigma_2 + \mu) + \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu) + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)}.$$

Kemudian

$$\begin{aligned}
k_3 &= xnm - \mu yn + \mu mn - \rho \sigma_1 z \mu \\
&= \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \hat{a}(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \frac{\kappa b_a(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} (\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + \mu(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \rho \sigma_1 \frac{\kappa b_c(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} \\
&= \kappa \left( b_a + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)} \\
&\quad (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \frac{\kappa b_a(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} (\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + \mu(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \rho \sigma_1 \frac{\kappa b_c(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)} \\
&= R_0(\sigma_1 + \mu) \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\sigma_1 + \mu)R_0} (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \frac{\kappa b_a}{R_0} (\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + \mu(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \rho \sigma_1 \frac{\kappa b_c}{R_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R_0(\sigma_1 + \mu) \frac{\mu(R_0 - 1)}{(\sigma_1 + \mu)R_0} (\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) \\
&\quad - \mu \frac{R_0((\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)) - \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} (\sigma_2 + \mu) \\
&\quad + \mu(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \rho \sigma_1 \frac{\kappa b_c}{R_0} \\
&= \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) + \mu \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0} \\
&\quad + \mu(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu) - \mu \rho \sigma_1 \frac{\kappa b_c}{R_0} \\
&= \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)
\end{aligned}$$

$k_3$  dapat dinyatakan sebagai

$$k_3 = \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu).$$

$$\text{dengan } R_0 = \kappa \left( \frac{b_a}{\sigma_1 + \mu} + \frac{b_c \rho \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu)} \right).$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, pembuat nol dari persamaan  $\gamma^3 + k_1\gamma^2 + k_2\gamma + k_3 = 0$  akan bertanda negatif jika  $k_1, k_2, k_3 > 0$  dan  $\Delta_2 = k_1k_2 - k_0k_3 > 0$ . Karena diketahui  $R_0 > 1$ , maka  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , dan  $k_3 > 0$ . Kemudian akan dibuktikan bahwa jika  $R_0 > 1$ , maka  $\Delta_2 = k_1k_2 - k_0k_3 > 0$ .

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= k_1k_2 - k_0k_3 \\
&= \left( (\sigma_2 + \mu) + \mu R_0 + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} \right) \left( \mu R_0(\sigma_2 + \mu) + \mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\mu(R_0 - 1)(\sigma_1 + \mu)(\sigma_2 + \mu))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\sigma_2 + \mu) \left( \mu R_0 (\sigma_2 + \mu) + \mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) \\
&\quad + \left( \mu R_0 + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) \left( \mu R_0 (\sigma_2 + \mu) + \mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) - (\mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) (\sigma_2 + \mu)) \\
&= (\sigma_2 + \mu) \mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) + (\sigma_2 + \mu) \left( \mu R_0 (\sigma_2 + \mu) + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) \\
&\quad + \left( \mu R_0 + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) \left( \mu R_0 (\sigma_2 + \mu) + \mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) - (\mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) (\sigma_2 + \mu)) \\
&= (\sigma_2 + \mu) \left( \mu R_0 (\sigma_2 + \mu) + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) \\
&\quad + \left( \mu R_0 + \frac{\kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right) \left( \mu R_0 (\sigma_2 + \mu) + \mu (R_0 - 1) (\sigma_1 + \mu) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mu \kappa b_c \rho \sigma_1}{R_0 (\sigma_2 + \mu)} \right).
\end{aligned}$$

Karena  $R_0 > 1$ , maka  $\Delta_2 = k_1 k_2 - k_0 k_3 > 0$ .

Diperoleh semua nilai eigen dari persamaan (3.53) bernilai negatif, sehingga terbukti bahwa jika  $R_0 > 1$ , maka titik ekuilibrium endemik  $E_1 = (\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r}) =$

$$\left( \frac{(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)}, \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)}, \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}, \frac{(\sigma_2 + (1 - \rho) \mu) \sigma_1}{\mu (\sigma_2 + \mu)} \hat{a} \right)$$

stabil asimtotik lokal.

### 3.5. Simulasi Model

Pada subbab ini akan dibahas mengenai simulasi numerik epidemi untuk memberikan gambaran lebih jelas mengenai model penyebaran virus hepatitis C khususnya pada pengguna narkoba suntik dengan menggunakan parameter-parameter dan nilai awal-nilai awal tertentu.

Di Indonesia, tingkat kejadian infeksi Hepatitis C oleh para pengguna narkoba suntik sekitar 77,3% (PKNI, tanpa tahun). Menurut Kretzschmar dan Wiessing (2004) tingkat kontak individu rentan (*susceptible*) dengan individu terinfeksi akut (*acute infection*) dan tingkat kontak individu rentan (*susceptible*) dengan individu terinfeksi kronik/pembawa (*chronic carrier*) masing-masing adalah  $b_a = 0,3$  dan  $b_c = 0,03$ . Di Indonesia tingkat rekrutmen pengguna narkoba suntik yang baru diperkirakan sebesar 0,056, sehingga nilai  $\frac{B}{N} = 0,056$ . Berdasarkan asumsi pertama, laju rekrutmen dan laju kematian adalah sama, maka diperoleh  $\mu = 0,056$ .

Nilai  $\sigma_1^{-1}$  merepresentasikan rata-rata durasi virus hepatitis C dalam fase akut. apabila diasumsikan rata-rata durasi virus Hepatitis C dalam fase akut yaitu 9,6 minggu, maka diperoleh  $\sigma_1 = \frac{1}{9,6 \text{ minggu}} = 5/\text{tahun}$ . Nilai  $\sigma_2^{-1}$  merepresentasikan rata-rata durasi virus hepatitis C fase kronis hingga sembuh/hilangnya virus dari dalam darah. Nilai parameter ini dapat bervariasi tergantung jenis penyakit lanjutan yang diderita, seperti berkembang menjadi kanker hati dan sirosis. Diasumsikan bahwa rata-rata durasi fase kronis yaitu rata-rata 20 tahun, maka diperoleh  $\sigma_2 = \frac{1}{20 \text{ tahun}} = 0,05/\text{tahun}$ . Parameter  $\rho$

merepresentasikan peluang individu yang terinfeksi virus hepatitis C akut berkembang menjadi infeksi kronis, yaitu sebesar 70%-90% (WHO, 2003), sehingga dapat diambil nilai parameter  $\rho = 80\% = 0,8$ .

Parameter  $\kappa$  merepresentasikan frekuensi rata-rata penggunaan jarum suntik secara bersama-sama. Nilai parameter ini dapat bervariasi. Diberikan simulasi model yang akan menunjukkan pengaruh dari variasi nilai parameter  $\kappa$  terhadap penyebaran virus hepatitis C.

Substitusi nilai-nilai parameter di atas ke persamaan (3.7), diperoleh sistem berikut

$$\frac{ds}{dt} = 0,056 - \kappa(0,3a + 0,03c)s - 0,056s$$

$$\frac{da}{dt} = \kappa(0,3a + 0,03c)s - 5,056a$$

$$\frac{dc}{dt} = 4a - 0,106c$$

$$\frac{dr}{dt} = a + 0,05c - 0,056r$$

Berikut diberikan simulasi untuk sistem di atas, saat  $R_0 < 1$  dan  $R_0 > 1$ . Simulasi digambarkan menggunakan program Maple 15.

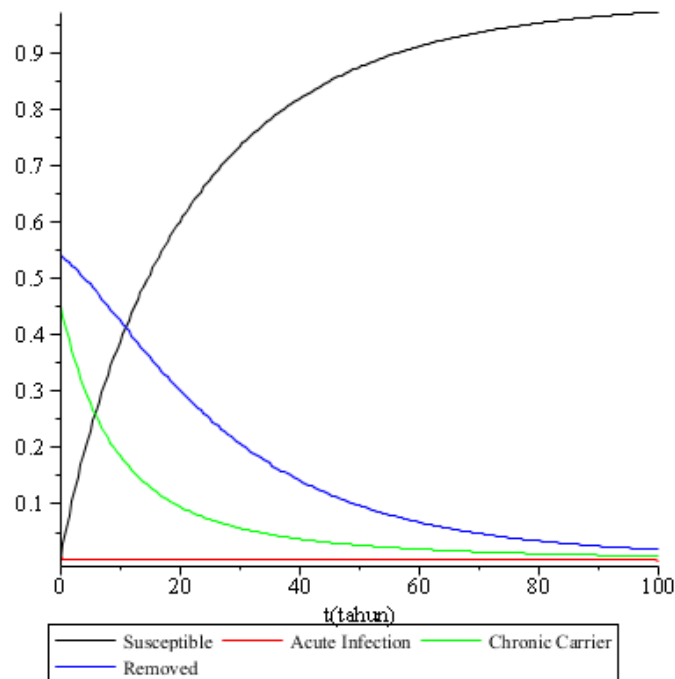
### 3.5.1. Simulasi $R_0 < 1$

Untuk  $R_0 < 1$ , diambil nilai  $\kappa = 3$  dan diberikan nilai awal untuk masing-masing proporsi individu rentan (*susceptible*), proporsi individu terinfeksi akut (*acute infection*), proporsi individu kronis (*chronic carrier*), dan proporsi individu



sembuh dari penyakit hepatitis C (*recovered*) masing-masing adalah  $s(0) = 0,002$ ,  $a(0) = 0,008$ ,  $c(0) = 0,45$ ,  $r(0) = 0,54$ . Simulasi disajikan dalam gambar 4.

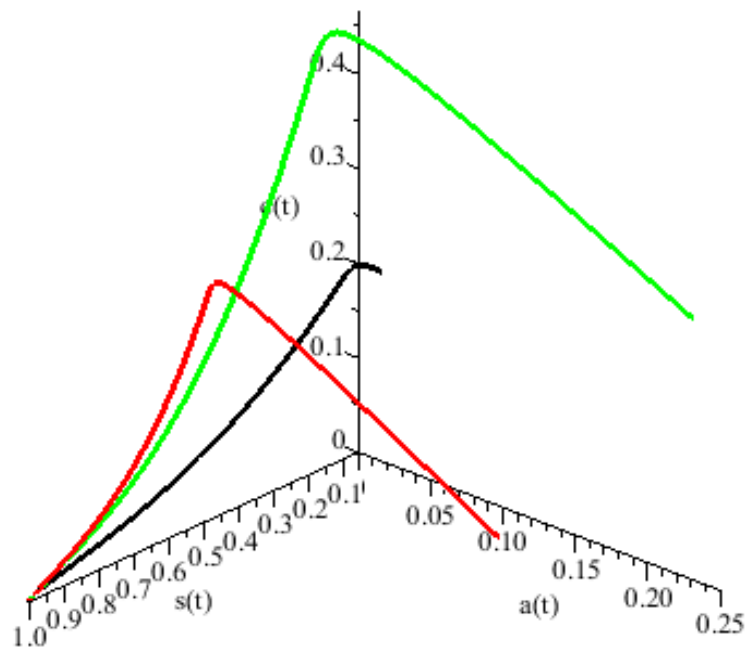
Jika nilai-nilai parameter tersebut disubstitusikan ke Sistem (3.20), diperoleh nilai  $R_0 = 0,8497283259 < 1$ . Berdasarkan gambar 4, terlihat bahwa proporsi individu rentan semakin meningkat seiring berjalannya waktu. Sementara untuk proporsi individu yang terinfeksi akut (*acute infection*), kronis (*chronic carrier*), dan terbebas (*recovered*) dari virus Hepatitis C semakin lama semakin menurun. Hal ini menunjukkan perilaku solusi yang lambat laun akan menuju titik ekuilibrium  $E_0$ . Sehingga dapat dikatakan bahwa saat  $R_0 < 1$ , hepatitis C akan menghilang dari populasi.



Gambar 4. Simulasi sistem (3.7) untuk  $R_0 < 1$

Selanjutnya, diberikan beberapa nilai awal untuk masing-masing proporsi individu *susceptible*, proporsi individu *acute infection*, dan proporsi individu *chronic carrier* adalah  $(0, 0.06, 0.015, 0.2)$ ,  $(0, 0.14, 0.25, 0.3)$ , dan  $(0, 0.49, 0.2, 0.1)$  untuk memperoleh potret fase solusi sistem pada bidang  $s, a, c$ . Berdasarkan nilai-nilai parameter dan nilai awal yang diberikan diperoleh potret fase pada bidang  $s, a, c$  yang disajikan dalam gambar 5.

Untuk beberapa nilai awal yang berbeda, terlihat bahwa grafik proporsi individu *susceptible* (grafik berwarna hitam) mengalami peningkatan menuju titik 1, sementara grafik proporsi individu *acute infection* (grafik yang berwarna merah) dan *chronic carrier* (grafik berwarna hijau) mengalami penurunan menuju titik nol untuk  $t \rightarrow \infty$ . Penurunan proporsi individu *acute infection* dan *chronic carrier* yang menuju titik nol menunjukkan bahwa proporsi individu *acute*



Gambar 5. Potret fase pada bidang  $s, a, c$  untuk  $R_0 < 1$

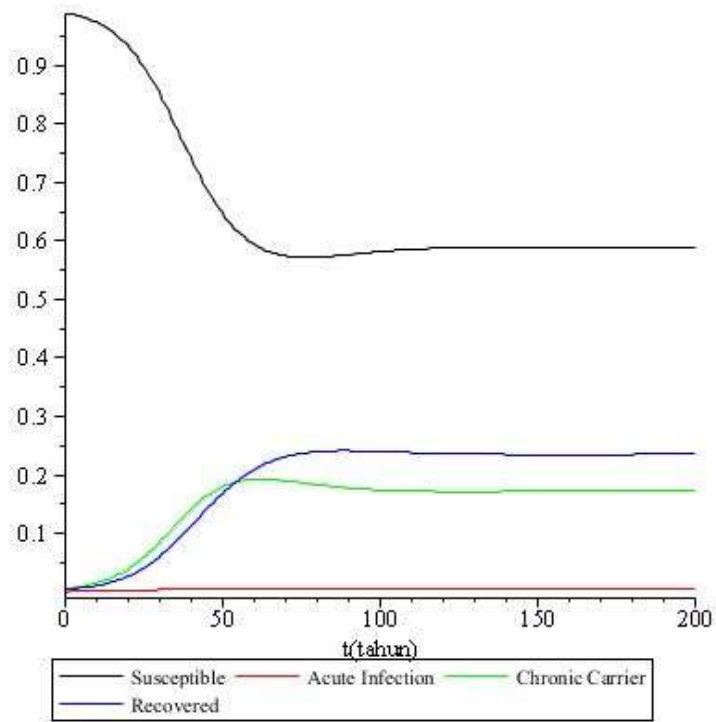
*infection* dan *chronic carrier* semakin habis (tidak ada yang terinfeksi) mengakibatkan semakin kecilnya laju infeksi (bahkan tidak ada), sehingga populasi menuju titik awal.

Simulasi ini menunjukkan bahwa saat  $R_0 < 1$  solusi sistem (3.7) bergerak menuju titik ekuilibrium  $E_0$ . Hal ini berarti hasil simulasi sesuai dengan hasil analitik pada teorema 3.4.4 yang menyatakan bahwa saat titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  stabil asimtotik global.

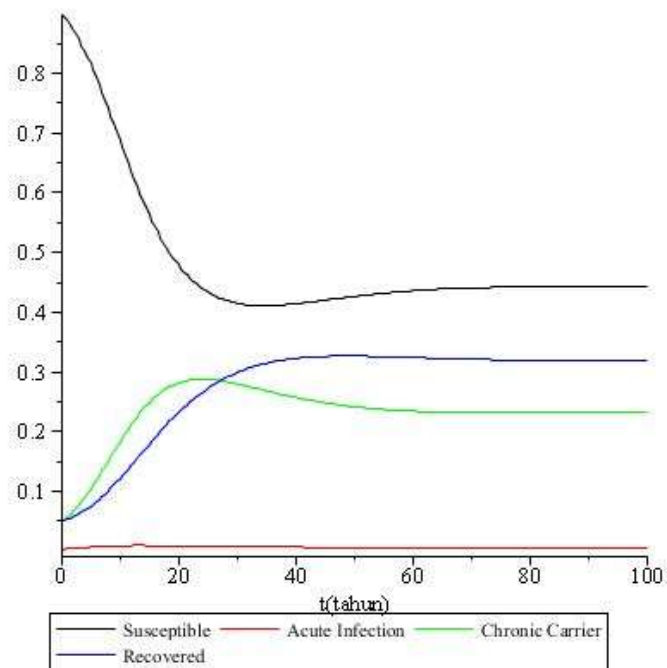
### 3.5.2. Simulasi $R_0 > 1$

Untuk  $R_0 > 1$ , diberikan nilai awal  $s(0) = 0,8995$ ,  $a(0) = 0,0005$ ,  $c(0) = 0,05$ ,  $r(0) = 0,05$  untuk memperoleh proyeksi potret fase solusi-solusi proporsi individu *susceptible*, *acute infection*, *chronic carrier*, *recovered* terhadap waktu  $t$  seperti pada gambar 6, gambar 7 dan gambar 8.

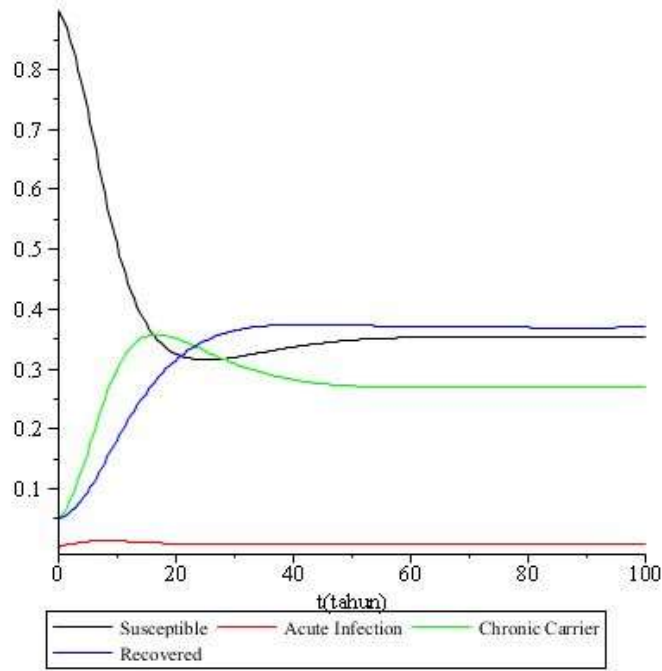
Berdasarkan simulasi gambar 6, gambar 7 dan gambar 8, terlihat bahwa saat proporsi individu rentan (*susceptible*) turun, proporsi individu yang terinfeksi HCV akut (*acute infection*) dan proporsi penderita hepatitis C kronis (*chronic carrier*) meningkat dan menuju suatu titik di  $E_1$ . Hal ini akibat dari adanya kontak antara individu rentan dengan penderita hepatitis C akut dan kronis. Saat proporsi individu yang terinfeksi akut dan individu kronis meningkat, maka proporsi individu sembuh (hilangnya HCV dalam tubuh penderita) juga meningkat dan menuju titik ekuilibrium  $E_1$ .



Gambar 6. Simulasi Sistem (3.7) untuk  $R_0 = 1,699456652$  dengan  $\kappa = 6$



Gambar 7. Simulasi Sistem (3.7) untuk  $R_0 = 2,265942202$  dengan  $\kappa = 8$



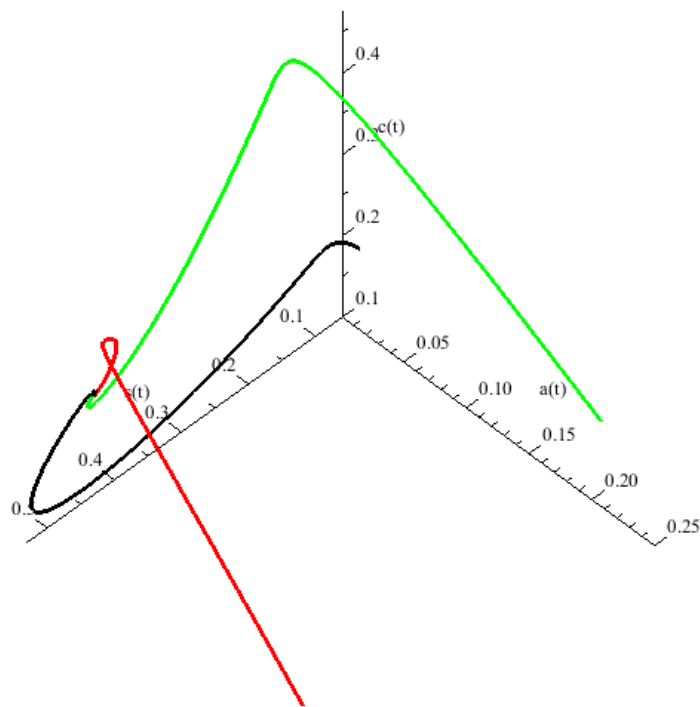
Gambar 8. Simulasi Sistem (3.7) untuk  $R_0 = 2,832427753$  dengan  $\kappa = 10$

Nilai numerik untuk untuk  $E_1$  saat  $\kappa = 6$  adalah  $\hat{s} = 0,588423364$ ,  $\hat{a} = 0,004558601980$ ,  $\hat{c} = 0,1720227162$ ,  $\hat{r} = 0,2349953177$ . Untuk  $\kappa = 8$  diperoleh  $\hat{s} = 0,4413175231$ ,  $\hat{a} = 0,006187938827$ ,  $\hat{c} = 0,2335071255$ ,  $\hat{r} = 0,3189874126$ . Sementara untuk  $\kappa = 10$  diperoleh  $R_0 = 2,832427753$ ,  $\hat{s} = 0,3530540184$ ,  $\hat{a} = 0,007165540935$ ,  $\hat{c} = 0,2703977711$ ,  $\hat{r} = 0,3693826695$ .

Berdasarkan nilai numerik dan simulasi pada gambar 6, gambar 7, dan gambar 8, terlihat bahwa saat frekuensi penggunaan jarum suntik secara bersama-sama ( $\kappa$ ) meningkat maka proporsi individu rentan semakin menurun, sementara proporsi penderita hepatitis C akut dan kronis dan proporsi individu yang terbebas dari hepatitis C semakin meningkat sebanding dengan nilai parameter  $\kappa$ . Peningkatan nilai parameter  $\kappa$  juga menunjukkan bahwa solusi sistem (3.7) semakin lama akan menuju titik ekuilibrium  $E_1$ , dan nilai  $R_0$  pun semakin besar.

Hal ini berarti bahwa jika frekuensi rata-rata penggunaan jarum suntik secara bersamaan semakin besar, maka laju infeksi akan semakin besar pula, yang selanjutnya berakibat pada semakin besarnya penyebaran virus Hepatitis C.

Selanjutnya, diberikan beberapa nilai awal untuk masing-masing proporsi individu *susceptible*, proporsi individu *acute infection*, dan proporsi individu *chronic carrier* masing-masing adalah  $(0, 0.06, 0.015, 0.2)$ ,  $(0, 0.14, 0.25, 0.3)$ , dan  $(0, 0.49, 0.2, 0.1)$ . Untuk melihat perilaku solusi sistem (3.7) disekitar titik ekuilibrium endemik pada bidang  $s, a$  dan  $c$ , diambil nilai parameter  $\kappa = 8$ , sehingga diperoleh titik ekuilibrium  $E_1 = (0,4413175231, 0,006187938827, 0,2335071255, 0,3189874126)$ .



Gambar 9. Potret fase pada bidang  $s, a$ , dan  $c$  untuk  $R_0 > 1$

Gambar 9 menunjukkan bahwa masing-masing grafik proporsi mengalami fluktuasi. Pada proses fluktuasi ini terjadi peningkatan dan penurunan proporsi

baik pada proporsi *susceptible*, *acute infection*, maupun *chronic carrier*. Penurunan proporsi *susceptible* dipengaruhi oleh adanya kematian alami individu *susceptible* dan adanya individu *susceptible* yang terinfeksi akibat kontak dengan individu *acute infection* dan *chronic carrier*. Sementara faktor yang mempengaruhi peningkatan proporsi *susceptible* yaitu rekrutmen pengguna narkoba suntik. Untuk penambahan proporsi *acute infection* dipengaruhi oleh proporsi individu *susceptible* yang terinfeksi hepatitis C, sedangkan penurunan proporsi karena adanya kematian alami dari kelas tersebut dan adanya individu yang sembuh (*recovered*) maupun berkembang menjadi individu *chronic carrier*. Selanjutnya, penambahan proporsi individu *chronic carrier* karena adanya perkembangan penyakit dari individu *acute infection*, sedangkan penurunan proporsi *chronic carrier* dipengaruhi oleh kematian alami kelas tersebut dan adanya individu bebas dari penyakit hepatitis C.

Solusi sistem (3.7) yang diberikan nilai awal yang berbeda-beda bergerak menuju titik ekuilibrium endemik  $E_1$  dan menjauhi titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$ . Hal ini berarti hasil simulasi sesuai dengan hasil analitik pada teorema 3.4.4 yang menyatakan bahwa saat  $R_0 > 1$  titik ekuilibrium endemik  $E_1$  stabil asimtotik dan teorema 3.4.2 (ii) yang menyatakan bahwa saat  $R_0 > 1$  titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0$  tidak stabil.

## BAB IV

### PENUTUP

#### 4.1 Kesimpulan

Pada skripsi ini telah dibahas mengenai model penyebaran virus Hepatitis C pada pengguna narkoba khususnya melalui jarum suntik. Adapun kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan model ini yaitu:

4.1.1 Model yang terbentuk dari penyebaran virus Hepatitis C khususnya pada pengguna narkoba melalui jarum suntik berupa sistem persamaan diferensial nonlinier orde satu. Model yang diperoleh sebagai berikut

$$\begin{aligned}\frac{dS(t)}{dt} &= B - \lambda S(t) - \mu S(t) \\ \frac{dA(t)}{dt} &= \lambda S(t) - \sigma_1 A(t) - \mu A(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} &= \rho \sigma_1 A(t) - \sigma_2 C(t) - \mu C(t) \\ \frac{dR(t)}{dt} &= (1 - \rho) \sigma_1 A(t) + \sigma_2 C(t) - \mu R(t)\end{aligned}$$

$$\text{dengan } \lambda(t) = \kappa \left( b_a \frac{A(t)}{N(t)} + b_c \frac{C(t)}{N(t)} \right)$$

4.1.2 Dengan menganalisa titik ekuilibrium dari sistem persamaan diferensial yang baru, yang berupa proporsi diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit  $E_0 = (1,0,0,0)$  dan titik ekuilibrium endemik  $E_1 = (\hat{s}, \hat{a}, \hat{c}, \hat{r})$ , dengan



$$\hat{s} = \frac{(\sigma_1 + \mu)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right)}; \quad \hat{a} = \frac{\mu \left( \kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) - (\sigma_1 + \mu) \right)}{\kappa \left( b_a + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \right) (\sigma_1 + \mu)}$$

$$\hat{c} = \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}; \quad \hat{r} = \frac{(\sigma_2 + (1 - \rho)\mu) \sigma_1}{\mu(\sigma_2 + \mu)} \hat{a}.$$

4.1.3 Model penyebaran virus hepatitis C pada pengguna narkoba suntik ini memiliki bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) berikut

$$R_0 = \kappa \left( \frac{b_a}{(\sigma_1 + \mu)} + b_c \frac{\rho \sigma_1}{(\sigma_2 + \mu)(\sigma_1 + \mu)} \right).$$

$R_0$  merupakan suatu indikator penyebaran penyakit. Jika  $R_0 < 1$  maka virus hepatitis C tidak menyerang populasi atau berangsur menghilang, sedangkan jika  $R_0 > 1$  maka penyakit endemik dan sangat mungkin untuk menyebar.

4.1.4 Pada kondisi  $R_0 < 1$  titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dan ketika  $R_0 \leq 1$  stabil asimtotik global. Hal ini berarti bahwa untuk jangka waktu yang lama, populasi penderita hepatitis C akan semakin berkurang atau bahkan menghilang sehingga virus tidak ada lagi dalam populasi.

Sementara itu, pada saat  $R_0 > 1$  titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal. Hal ini menunjukkan bahwa untuk jangka waktu tertentu, virus Hepatitis C akan tetap ada.

4.1.5 Berdasarkan hasil simulasi, terlihat bahwa semakin tinggi frekuensi penggunaan jarum secara bersama-sama pada pengguna narkoba suntik, maka penderita hepatitis C akut dan kronis dan individu yang bebas dari hepatitis C semakin meningkat, sedangkan banyaknya individu rentan akan

semakin menurun. Peningkatan dan penurunan banyaknya individu sebanding dengan frekuensi penggunaan jarum suntik secara bersama-sama.

#### **4.2 Saran**

Pada skripsi ini model penyebaran virus hepatitis C hanya terbatas pada pengambilan kasus khusus yaitu untuk laju infeksi dengan frekuensi penggunaan jarum suntik bersama yang homogen. Oleh sebab itu, untuk penelitian selanjutnya disarankan untuk membahas penyebaran hepatitis C dalam populasi yang heterogen, yaitu memperhatikan tinggi rendahnya resiko tertularnya hepatitis C. Selain itu dapat pula dibahas untuk model yang laju rekrutmen tidak sama dengan laju kematian alami.

Bagi pengguna narkoba, dengan adanya penelitian ini dapat dijadikan informasi bahwa penggunaan jarum suntik secara bersama-sama meningkatkan resiko untuk tertular penyakit-penyakit yang menyerang pengguna narkoba, salah satunya hepatitis C. Sehingga, disarankan bagi para pengguna narkoba untuk lebih bijaksana dalam penggunaan jarum suntik, yaitu dengan mengurangi penggunaan jarum suntik secara bersama-sama atau dengan mensterilkan jarum suntik yang telah digunakan untuk mengurangi resiko tertular penyakit berbahaya.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, Howard. (2003). *Aljabar Linear Elementer* (Alih Bahasa: Refina Indriasari), Jakarta: Erlangga
- Diekmann, O dan Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. New York: John Wiley and Son
- Direktorat Jendral PP & PL. (2012). *Pedoman Pengendalian Hepatitis Virus*. Kementrian Kesehatan RI
- Dontwi et al. (2010). “*Mathematical modeling of Hepatitis C Virus transmission among injecting drug users and the impact of vaccination*”. Diakses dari <http://scihub.org/AJSIR/PDF/2010/1/AJSIR-1-1-41-46.pdf> pada 19 November 2013, Jam 06:30
- Driessche and Watmough. (2002). Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*. 180 (2002). hlm. 29–48
- Hahn. 1967. *Stability of Motion*. Springer-Verlag. New York
- Jain, P K and Gupta V P. (1986). “*Lebesgue Measure and Integration*”. New Delhi: Wiley Eastern Limited
- Keeling, M. J and Rohani, P. (2008). “*Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*”. USA: Princeton University
- Kretzschmar, M and Wiessing, L. (2004). Modelling the transmission of hepatitis C in injecting drug users. *Hepatitis C and Injecting Drug Use: Impact, Costs and Policy Options*. Hlm. 143-158
- Dwi Lestari. (2010). Model epidemi SIR berdasarkan kelompok umur. *Tesis*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta
- Martcheva, M and Castillo-Chaves, C. (2003). Diseases with chronic stage in a population with varying size. *Mathematical Biosciences*. 182. Hlm. 1-25
- Olsder, G. J & Woude, J.W. van der. 2004. *Mathematical Systems Theory*. Netherland: VVSD
- Perko, Lawrence. 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. 3rd. New York: Springer.
- PKNI. tanpa tahun. Hepatitis C: Sebuah krisis kesehatan masyarakat yang mendesak. Diakses dari <http://www.pkni.org/wp-content/uploads/2013/09/PKNI-Hep-C-Brief-versi-indonesia.pdf>. pada tanggal 03 Maret 2013, Jam 17.30 WIB

- Wiwiek Rahayu. 2005. *Basic Reproduction Number, Analisa Dinamik dan Proseses Markov dari Model Penyebaran Ebola. Skripsi.* Universitas Indonesia, Depok
- Ross, L. (1984). *Differential Equations*. 3rd. New York. Springer
- Ratna Widayati. (2013). *Pemodelan matematika untuk penyebaran penyakit flu singapura (Hand, Foot and Mouth Disease) berdasarkan model SEIRS. Skripsi.* Universitas Negeri Yogyakarta
- Widowati & Sutimin. (2007). *Buku ajar pemodelan matematika.* Semarang: Universitas Diponegoro
- Wiggins, Stephen. (1990). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* New York: Springer
- World Health Organization. (2002). "*Hepatitis C*". Diakses dari <http://www.who.int/csr/disease/hepatitis/Hepc.pdf>. pada 13 November 2013, Jam 8:30

## LAMPIRAN

Lampiran 1. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi  $s, a, c, r$  terhadap  $t$  dengan  $R_0 < 1$

```

> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
>  $\mu := 0.056 : B := 0.056 : ba := 0.3 : bc := 0.03 : \sigma_1 := 5 : \sigma_2$ 
    $:= 0.05 : \rho := 0.8 : \kappa := 3 :$ 

>  $ds := B - \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s - \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \mu \cdot s :$ 
    $da := \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s + \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \sigma_1 \cdot a - \mu \cdot a :$ 
    $dc := \rho \cdot \sigma_1 \cdot a - \sigma_2 \cdot c - \mu \cdot c :$ 
    $dr := (1 - \rho) \cdot \sigma_1 \cdot a + \sigma_2 \cdot c - \mu \cdot r :$ 

>  $R_0 := \kappa \cdot \left( \frac{ba}{\sigma_1 + \mu} + \frac{bc \cdot \rho \cdot \sigma_1}{(\sigma_1 + \mu) \cdot (\sigma_2 + \mu)} \right) :$ 

> ekui := solve( { ds = 0, da = 0, dc = 0, dr = 0 }, [s, a, c, r] ) :

> sist := matrix( [ [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(ds))],
   [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(da))], [subs(s
   = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dc))], [subs(s = s(t), a
   = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dr))] ] ) :

> sistem := diff(s(t), t) = sist[1, 1], diff(a(t), t) = sist[2, 1], diff(c(t), t)
   = sist[3, 1], diff(r(t), t) = sist[4, 1] :

> fcns := {s(t), a(t), c(t), r(t)} :

> awal := dsolve( {s(0) = 0.002, a(0) = 0.008, c(0) = 0.45, r(0) = 0.54,
   sistem}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun = 1000000)
   :

> odeplot(awal, [ [t, s(t), color = black], [t, a(t), color = red], [t, c(t),
   color = green], [t, r(t), color = blue]], 0..100, legend
   = ["Susceptible", "Acute Infection", "Chronic Carrier",
   "Removed"], legendstyle = [font = ["ROMAN", 9], location
   = bottom], labels = ["t(tahun)", ""], labelfont = ["ROMAN", 10])
   :
```

Lampiran 2. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase bidang  $s, a, c$  dengan  $R_0 < 1$

```

> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
>  $\mu := 0.056 : B := 0.056 : ba := 0.3 : bc := 0.03 : \sigma 1 := 5 : \sigma 2$ 
     $:= 0.05 : \rho := 0.8 : \kappa := 3 :$ 

>  $ds := B - \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s - \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \mu \cdot s :$ 
     $da := \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s + \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \sigma 1 \cdot a - \mu \cdot a :$ 
     $dc := \rho \cdot \sigma 1 \cdot a - \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot c :$ 
     $dr := (1 - \rho) \cdot \sigma 1 \cdot a + \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot r :$ 

>  $R_0 := \kappa \cdot \left( \frac{ba}{\sigma 1 + \mu} + \frac{bc \cdot \rho \cdot \sigma 1}{(\sigma 1 + \mu) \cdot (\sigma 2 + \mu)} \right) :$ 

> ekui := solve( {ds = 0, da = 0, dc = 0, dr = 0}, [s, a, c, r]) :

> sist := matrix( [[subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(ds))],
    [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(da))], [subs(s
    = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dc))], [subs(s = s(t), a
    = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dr))]] ) :

> sistSAC := matrix( [[sist[1, 1]], [sist[2, 1]], [sist[3, 1]]]) :

> sistemSAC := diff(s(t), t) = sistSAC[1, 1], diff(a(t), t) = sistSAC[2,
    1], diff(c(t), t) = sistSAC[3, 1] :

> fcns := {s(t), a(t), c(t)} :

> awalSA := dsolve( {s(0) = 0.002, a(0) = 0.008, c(0) = 0.45,
    sistemSAC}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun
    = 1000000) :

> initsx := [0, 0.06, 0.015, 0.2], [0, 0.49, 0.2, 0.1], [0, 0.14, 0.25, 0.3] :

> DEplot3d([sistemSAC], [s(t), a(t), c(t)], t = 0 ..1000, [initsx], scene
    = [s(t), a(t), c(t)], linecolor = [black, red, green], stepsize = 0.1)
    :
```

Lampiran 3. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi  $s, a, c, r$  terhadap  $t$  dengan  $\kappa = 6$  ( $R_0 = 1,699456652$ )

```

> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
>  $\mu := 0.056 : B := 0.056 : ba := 0.3 : bc := 0.03 : \sigma 1 := 5 : \sigma 2$ 
     $:= 0.05 : \rho := 0.8 : \kappa := 6 :$ 

>  $ds := B - \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s - \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \mu \cdot s :$ 
     $da := \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s + \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \sigma 1 \cdot a - \mu \cdot a :$ 
     $dc := \rho \cdot \sigma 1 \cdot a - \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot c :$ 
     $dr := (1 - \rho) \cdot \sigma 1 \cdot a + \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot r :$ 

>  $R_0 := \kappa \cdot \left( \frac{ba}{\sigma 1 + \mu} + \frac{bc \cdot \rho \cdot \sigma 1}{(\sigma 1 + \mu) \cdot (\sigma 2 + \mu)} \right) :$ 
>  $ekui := solve(\{ds = 0, da = 0, dc = 0, dr = 0\}, [s, a, c, r]) :$ 
>  $sist := matrix([ [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(ds))],$ 
     $[subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(da))], [subs(s$ 
     $= s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dc))], [subs(s = s(t), a$ 
     $= a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dr))]]]) :$ 

>  $sistem := diff(s(t), t) = sist[1, 1], diff(a(t), t) = sist[2, 1], diff(c(t), t)$ 
     $= sist[3, 1], diff(r(t), t) = sist[4, 1] :$ 

>  $fcns := \{s(t), a(t), c(t), r(t)\} :$ 
>  $awal := dsolve(\{s(0) = 0.9895, a(0) = 0.0005, c(0) = 0.005, r(0)$ 
     $= 0.005, sistem\}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun$ 
     $= 1000000) :$ 

>  $odeplot(awal, [[t, s(t), color = black], [t, a(t), color = red], [t, c(t),$ 
     $color = green], [t, r(t), color = blue]], 0..200, legend$ 
     $= ["Susceptible", "Acute Infection", "Chronic Carrier",$ 
    "Recovered"], legendstyle = [font = ["ROMAN", 9], location
     $= bottom], labels = ["t(tahun)", ""], labelfont = ["ROMAN", 10])$ 

```

Lampiran 4. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi  $s, a, c, r$  terhadap  $t$  dengan  $\kappa = 8$  ( $R_0 = 2,265942202$ )

```

> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
>  $\mu := 0.056 : B := 0.056 : ba := 0.3 : bc := 0.03 : \sigma 1 := 5 : \sigma 2$ 
     $:= 0.05 : \rho := 0.8 : \kappa := 8 :$ 

>  $ds := B - \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s - \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \mu \cdot s :$ 
     $da := \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s + \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \sigma 1 \cdot a - \mu \cdot a :$ 
     $dc := \rho \cdot \sigma 1 \cdot a - \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot c :$ 
     $dr := (1 - \rho) \cdot \sigma 1 \cdot a + \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot r :$ 

>  $R_0 := \kappa \cdot \left( \frac{ba}{\sigma 1 + \mu} + \frac{bc \cdot \rho \cdot \sigma 1}{(\sigma 1 + \mu) \cdot (\sigma 2 + \mu)} \right) :$ 

> ekui := solve( {ds = 0, da = 0, dc = 0, dr = 0}, [s, a, c, r] ) :

> sist := matrix( [[subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(ds))],
    [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(da))], [subs(s
    = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dc))], [subs(s = s(t), a
    = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dr))]] ) :

> sistem := diff(s(t), t) = sist[1, 1], diff(a(t), t) = sist[2, 1], diff(c(t), t)
    = sist[3, 1], diff(r(t), t) = sist[4, 1] :

> fcns := {s(t), a(t), c(t), r(t)} :

> awal := dsolve( {s(0) = 0.8995, a(0) = 0.0005, c(0) = 0.05, r(0)
    = 0.05, sistem}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun
    = 1000000) :

> odeplot(awal, [[t, s(t), color = black], [t, a(t), color = red], [t, c(t),
    color = green], [t, r(t), color = blue]], 0..100, legend
    = ["Susceptible", "Acute Infection", "Chronic Carrier",
    "Recovered"], legendstyle = [font = ["ROMAN", 9], location
    = bottom], labels = ["t(tahun)", ""], labelfont = ["ROMAN", 10])

```



Lampiran 5. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase solusi-solusi  $s, a, c, r$  terhadap  $t$  dengan  $\kappa = 10$  ( $R_0 = 2,832427753$ )

```

> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
>  $\mu := 0.056 : B := 0.056 : ba := 0.3 : bc := 0.03 : \sigma 1 := 5 : \sigma 2$ 
     $:= 0.05 : \rho := 0.8 : \kappa := 10 :$ 

>  $ds := B - \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s - \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \mu \cdot s :$ 
     $da := \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s + \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \sigma 1 \cdot a - \mu \cdot a :$ 
     $dc := \rho \cdot \sigma 1 \cdot a - \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot c :$ 
     $dr := (1 - \rho) \cdot \sigma 1 \cdot a + \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot r :$ 

>  $\lambda := k \cdot (ba \cdot a + bc \cdot c) :$ 
>  $R_0 := \kappa \cdot \left( \frac{ba}{\sigma 1 + \mu} + \frac{bc \cdot \rho \cdot \sigma 1}{(\sigma 1 + \mu) \cdot (\sigma 2 + \mu)} \right) :$ 
>  $ekui := solve(\{ds = 0, da = 0, dc = 0, dr = 0\}, [s, a, c, r]) :$ 
>  $sist := matrix([ [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(ds))],$ 
     $[subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(da))], [subs(s$ 
     $= s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dc))], [subs(s = s(t), a$ 
     $= a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dr))]]):$ 

>  $sistem := diff(s(t), t) = sist[1, 1], diff(a(t), t) = sist[2, 1], diff(c(t), t)$ 
     $= sist[3, 1], diff(r(t), t) = sist[4, 1] :$ 

>  $fcns := \{s(t), a(t), c(t), r(t)\} :$ 
>  $awal := dsolve(\{s(0) = 0.8995, a(0) = 0.0005, c(0) = 0.05, r(0)$ 
     $= 0.05, sistem\}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun$ 
     $= 1000000) :$ 

>  $odeplot(awal, [[t, s(t), color = black], [t, a(t), color = red], [t, c(t),$ 
     $color = green], [t, r(t), color = blue]], 0 .. 100, legend$ 
     $= ["Susceptible", "Acute Infection", "Chronic Carrier",$ 
    "Recovered"], legendstyle = [font = ["ROMAN", 9], location
     $= bottom], labels = ["t(tahun)", ""], labelfont = ["ROMAN", 10])$ 

```

Lampiran 6. Program maple untuk gambar proyeksi potret fase bidang  $s, a, c$  dengan  $R_0 > 1$

```

> restart :
> with(plots) : with(linalg) : with(DEtools) :
>  $\mu := 0.056 : B := 0.056 : ba := 0.3 : bc := 0.03 : \sigma 1 := 5 : \sigma 2$ 
     $:= 0.05 : \rho := 0.8 : \kappa := 8 :$ 

>  $ds := B - \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s - \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \mu \cdot s :$ 
     $da := \kappa \cdot ba \cdot a \cdot s + \kappa \cdot bc \cdot c \cdot s - \sigma 1 \cdot a - \mu \cdot a :$ 
     $dc := \rho \cdot \sigma 1 \cdot a - \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot c :$ 
     $dr := (1 - \rho) \cdot \sigma 1 \cdot a + \sigma 2 \cdot c - \mu \cdot r :$ 

>  $R_0 := \kappa \cdot \left( \frac{ba}{\sigma 1 + \mu} + \frac{bc \cdot \rho \cdot \sigma 1}{(\sigma 1 + \mu) \cdot (\sigma 2 + \mu)} \right) :$ 
> ekui := solve( {ds = 0, da = 0, dc = 0, dr = 0}, [s, a, c, r] ) :
> sist := matrix( [[subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(ds))],
    [subs(s = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(da))], [subs(s
    = s(t), a = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dc))], [subs(s = s(t), a
    = a(t), c = c(t), r = r(t), eval(dr))]] ) :

> sistSAC := matrix( [[sist[1, 1]], [sist[2, 1]], [sist[3, 1]]] ) :
> sistemSAC := diff(s(t), t) = sistSAC[1, 1], diff(a(t), t) = sistSAC[2,
    1], diff(c(t), t) = sistSAC[3, 1] :

> fcns := {s(t), a(t), c(t)} :
> awalISA := dsolve( {s(0) = 0.8995, a(0) = 0.0005, c(0) = 0.2,
    sistemSAC}, fcns, type = numeric, method = rkf45, maxfun
    = 1000000) :

> inits := [0, 0.06, 0.015, 0.2], [0, 0.49, 0.2, 0.1], [0, 0.14, 0.25, 0.3] :
> DEplot3d( [sistemSAC], [s(t), a(t), c(t)], t = 0 .. 1000, [inits], scene
    = [s(t), a(t), c(t)], linecolor = [black, red, green], stepsize = 0.1)
    :
```